CALCULO INFINITESIMAL



SIXTO RIOS

CALCULO INFINITESIMAL

SIXTO RIOS

Catedrático de la Universidad de Madrid
Director del Instituto de Investigación Operativa
y de la Escuela de Estadística
Numerario de la Real Academia de Ciencias

CALCULO INFINITESIMAL

1973

PARANINFO

MADRID

IMPRESO EN ESPAÑA
PRINTED IN SPAIN



Magallanes, 21—MADRID-15.

Imprime: HEROES, S. A.—Torrelara, 8-Madrid-16.

Depósito legal: M. 30.920 - 1972

Indice de materias

CALCULO INFINITESIMAL

CALCULO NUMERICO

Pág.

CAPITULO 1

Extensiones sucesivas del concepto de número

1. AMPLIACIONES DEL CONCEPTO DE NUMERO NATURAL

En la enseñanza elemental se introduce el concepto de *número natural*, como resultado de la operación de contar los elementos de un conjunto.

Después se extiende este concepto para poder efectuar sin restricciones la resta, obteniéndose los *números enteros* y este nuevo campo se amplia para poder efectuar la operación de división, obteniéndose los *números racionales*. Una nueva extensión del concepto de número racional, que permite el cálculo de raíces, conduce al *número real*. Más tarde se introduce el *número complejo* para calcular las raíces cuadradas de números negativos.

Si este proceso quiere hacerse mediante una exposición matemática rigurosa resulta bastante laborioso e inapropiado para este nivel de enseñanza. Más sencillo es introducir directamente los números reales mediante sus propiedades básicas formuladas por medio de una serie de axiomas y sobre ellos construir la teoría. Sin embargo, por razones didácticas, nos parece conveniente hacer un resumen de las dichas ampliaciones del concepto de número natural hasta llegar a los números reales que, después fundamentamos mediante una axiomática apropiada. De este modo se ve mejor la relación de esta teoría con la enseñanza anterior y su contenido intuitivo, tan interesante para el alumno.

2. NUMEROS NATURALES

Si en un lugar están Pedro, Juan y Pablo, nosotros decimos que hay tres personas, y si encima de la mesa hay una pluma, un lápiz y un tintero, también decimos que hay 3 objetos, etc. *El número resulta así ser la propiedad común a todos estos conjuntos al hacer abstracción de la naturaleza y propiedades de los elementos que los forman y el orden en que se enuncian.* Para designar los *números naturales*, originados en la operación de contar los elementos de los conjuntos, se utilizan símbolos como 1, 2, 3, ..., en el sistema decimal.

No tratamos de exponer aquí el concepto de número natural edificado sobre la base de la teoría de conjuntos y, como consecuencia de tal concepto, sus propiedades. No es posible en un curso elemental entrar en esta cuestión de fundamentos que es difícil y laboriosa. Como lo que nos interesan son las operaciones con los números vamos a considerar como dados los números naturales y a introducir las operaciones de suma y producto mediante una serie de *axiomas*, que constituyen las propiedades más sencillas de tales operaciones y de las cuales resultarán todas las otras propiedades de la Aritmética de los números naturales por razonamientos lógicos.

Supondremos dado un conjunto N de elementos $a, b, \ldots$, tales que para todo par $a \in N$, $b \in N$, esta definida la suma $(+)$ y el producto $(\cdot)$ y que estas operaciones verifican las siguientes propiedades o axiomas:

Ax. *I* *(de asociatividad)*

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

Ax. *II* *(de conmutatividad)*

$$a + b = b + a$$

Ax. *III* *Todo elemento es regular para la suma: Si*

$$a + b = a + c, \text{ es } b = c$$

Ax. *IV* *(de asociatividad)*

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

Ax. *V* *(de conmutatividad)*

$$a \cdot b = b \cdot a$$

Ax. *VI* *(de existencia de elemento neutro para el producto). Existe un número natural* I, *tal que todo número* $a \in N$ *verifica la relación* $I \cdot a = a$.

Ax. *VII* *Todo elemento es regular para el producto. Si es*

$$a \cdot b = a \cdot c, \text{ es } b = c$$

La noción de mayor o menor se introduce por la siguiente:

Definición: Si a, b *son números naturales diremos que* $a < b$ *si existe un número natural* d *tal que*

$$a + d = b$$

Ax. *VIII (de tricotomía). Si* a, b *son dos números naturales cualesquiera se verifica entre ellos una de las tres relaciones siguientes:*

$$a < b \qquad a = b \qquad a > b$$

Como ejercicio probar las siguientes propiedades:

a) *Si* $a, b, c, d,$ son números naturales, tales que:

$$a + b = c + d \text{ y } a = c, \text{ es } b = d$$

b) *Si* $a, b, c,$ son tales que $a < b$, es:

$$a + c < b + c$$

c) *Si* $1 < a, a < a^2$.

Dados dos números a, b definimos $a - b$ como un múmero c, supuesto existente, tal que $a = b + c$.

Decimos supuesto existente, puesto que no hay ningún número natural que sea, por ejemplo, igual a $4 - 8$. Esto se expresa diciendo que los números naturales no forman un sistema *cerrado* respecto de la sustracción.

Análogamente se define el cociente de dos números $a : b$, y sabemos que tampoco forman los números naturales un sistema *cerrado* respecto de la división.

Resolver estos problemas, ampliando el sistema de los números naturales, es el objeto de las siguientes extensiones del concepto de número natural.

3. EL NUMERO ENTERO

Un número natural cualquiera, por ejemplo 3, se puede escribir como diferencia de otros dos números naturales de infinidad de maneras:

$$3 = 4 - 1 = 5 - 2 = 6 - 3 = \dots \qquad [1]$$

Se ve que la igualdad:

$$4 - 1 = 5 - 2 \qquad [2]$$

equivale a la igualdad:

$$4 + 2 = 5 + 1 \qquad [3]$$

Si partimos de otra relación análoga, por ejemplo:

$$4 + 9 = 6 + 7 \qquad [3']$$

la relación análoga a [2], o sea:

$$4 - 7 = 6 - 9 \qquad [2']$$

carece de sentido, ya que estas diferencias no existen por no estar definidas en el conjunto de los números naturales. Sin embargo, podemos decir que, así como

las sumas [3] (que son equivalentes a las diferencias [2]) definen el mismo número natural, las sumas [3'] definen también un nuevo número, que llamaremos *entero*.

Vemos de este modo que los números enteros vienen a permitir resolver el problema de la sustracción de números naturales en todos los casos.

En el aspecto teórico se observa que el sistema de los números naturales es un semigrupo respecto de la adición y veremos que al ampliarlo con los enteros este nuevo sistema ya es un grupo respecto de la adición.

Designemos por N el conjunto de los números naturales y consideremos el conjunto $(N \times N)^*$ de los pares ordenados (a, b) de números naturales, tales que $a \geqslant b$. La correspondencia $(a, b) \to a - b$ define una aplicación de dicho conjunto sobre el de los números naturales. Dos pares (a, b), (a', b') se aplican sobre el mismo número natural n si:

$$n = a - b = a' - b' \tag{4}$$

es decir, si:

$$a + b' = a' + b \tag{5}$$

Esta condición [5], tomada como relación de equivalencia $\mathscr{P}$ de pares (a, b); (a', b'), define una clasificación en clases de equivalencia en que la clase que corresponde a un número natural n es la de todos los pares $(n + m, m)$ en que m es un número natural arbitrario.

El conjunto cociente $(N \times N)^*/\mathscr{P}$ está en correspondencia biunívoca con N. Las operaciones definidas anteriormente sobre N indican operaciones sobre el conjunto anterior, de modo que ambos resultan isomorfos.

Se define la suma de pares:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

porque en el conjunto N es:

$$(a - b) + (c - d) = (a + c) - (b + d)$$

y se define el producto:

$$(a, b)\,(c, d) = [(ac + bd), (ad + bc)]$$

porque sobre N es:

$$(a - b)\,(c - d) = (ac + bd) - (ad + bc)$$

Se puede comprobar que estas operaciones verifican las mismas propiedades (asociativa, conmutativa, etc.), que las operaciones en el conjunto N.

Aparentemente lo que hemos hecho es complicar la situación y considerar las operaciones con números naturales, por ejemplo: 3×5, como operaciones con pares tales que su diferencia es un número natural. Por ejemplo:

$$3 \times 5 = (7 - 4) \times (7 - 2) = (8 - 5) \times (8 - 3) = \ldots$$

La ventaja está en que *si ahora prescindimos de la condición de que dichas diferencias deben representar números naturales, tenemos un cálculo establecido para un campo más amplio de números que tiene dos cualidades interesantes:*

1.° *Las operaciones en el nuevo campo se apoyan en las definidas para los números naturales.*

2.° *Las operaciones en el nuevo campo tienen las mismas propiedades formales que las definidas en el campo de los números naturales.*

Consideremos, pues, el conjunto de pares $(a, b) \in (N \times N)$ en que prescindiremos de la condición $a > b$ y definamos la equivalencia como en [5]. El conjunto cociente $(N \times N)/\mathscr{P}$ se llama conjunto Z de los *números enteros*. Conviene indicar tres casos posibles:

1.° Si $a > b$, se tiene $(a, b) \mathscr{P} (a - b, 0)$ y el número natural $m = a - b$ se llamará *entero positivo* y en la notación corriente se escribe $m \mathscr{P} (m, 0)$.

2.° Si $a = b$, se tiene $(a, b) \mathscr{P} (0, 0)$ y tenemos el *entero nulo*.

3.° Si $a < b$, se tiene $(a, b) \mathscr{P} (0, b - a)$. Se dice que el par (a, b) equivale a un *entero negativo* $(0, m)$ y también se escribe este número con la notación $-m$.

En los casos 1.° y 3.° se dice que m es el *módulo* o *valor absoluto* de (a, b) y se escribe $|(a, b)| = m$. En el caso 2.° se dice que el módulo de (a, a) es cero.

Se puede ver que *el conjunto de los números enteros es un dominio de integridad*. En particular, *es un grupo respecto de la adición y, por tanto, la sustracción es siempre posible.*

Si entre los elementos de Z establecemos la relación $\alpha \geqslant \beta$ equivale a $\alpha - \beta > 0$ ó $\alpha = \beta$, se demuestra fácilmente que ésta es una *relación de orden*. Se ve fácilmente que esta relación nos hace considerar el conjunto Z como *totalmente ordenado y que la relación de orden es compatible con la adición*, es decir, si:

$$\alpha \leqslant \beta, \quad \text{es} \quad \alpha + \gamma \leqslant \beta + \gamma$$

4. NÚMEROS RACIONALES

En el anillo Z de los enteros no es posible resolver una ecuación como $3x = 4$. Esto conduce a ampliar este anillo en forma análoga a como hicimos con el campo de los números naturales.

Un número entero cualquiera, por ejemplo, 3, puede escribirse de infinidad de maneras como cociente de dos números enteros:

$$3 = 6 : 2 = 12 : 4 = \ldots \qquad [1]$$

Se ve que la igualdad:

$$6 : 2 = 12 : 4 \qquad [2]$$

equivale a la igualdad:

$$6 \times 4 = 12 \times 2 \qquad [3]$$

Si partimos una relación análoga:

$$6 \times 10 = 12 \times 5 \qquad [3']$$

la relación análoga a la [2] es:

$$6 : 5 = 12 : 10 \qquad [2']$$

y carece de sentido, ya que estos cocientes no están definidos. Sin embargo, podemos decir que, así como los productos [3], que son equivalentes a los cocientes [2], definen el mismo número entero, los productos [3'] definen también un nuevo número, que llamaremos *racional*.

En general, si α y β son números enteros y es $\alpha = \dot{\beta}$, la ecuación:

$$\beta x = \alpha \qquad [4]$$

tiene solución entera.

Sabemos que:

$$\alpha : \beta = \alpha' : \beta' \qquad [5]$$

cuando y sólo cuando es:

$$\alpha \cdot \beta' = \beta \cdot \alpha' \qquad [6]$$

es decir, que cuando $\alpha = \dot{\beta}$, el mismo entero define el cociente $\alpha : \beta$ que el $\alpha' : \beta'$ si se verifica la condición [6]. Ahora bien, si $\alpha \neq \dot{\beta}$, la condición [5] carece de sentido, ya que no representan ningún número los cocientes; pero sí tiene sentido la condición [6]. Entonces tomaremos esta condición como relación de equivalencia entre pares de números enteros y la clasificación, que de este modo introducimos, nos conducirá a la definición del nuevo número y a las operaciones.

Sea Z el anillo de los enteros y Z^* el mismo conjunto sin el cero. Consideramos el producto $Z \times Z^*$, es decir, los pares ordenados (α, β), tales que $\beta \neq 0$, y definimos una relación de equivalencia: $(\alpha, \beta) \mathscr{P} (\alpha', \beta')$ si y sólo si $\alpha\beta' = \beta\alpha'$. Se ve fácilmente que las clases de equivalencia asociadas forman una partición del conjunto $Z \times Z^*$ y definimos los números *racionales* como los elementos del conjunto cociente $(Z \times Z^*)/\mathscr{P}$. La notación corriente es: $(\alpha, \beta) = \alpha/\beta$.

Las operaciones de suma y producto se definen en la forma conocida:

$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha\delta + \beta\gamma}{\beta\delta} \quad ; \quad \frac{\alpha}{\beta}\,\frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha \cdot \gamma}{\beta \cdot \delta}$$

Se ve fácilmente que tal campo de números es un *cuerpo*, es decir, es:

1.° *Un grupo abeliano respecto de la suma.*

2.° *Un grupo abeliano respecto del producto.*

3.° *Verifica la propiedad distributiva.*

La relación de orden introducida para los números enteros se introduce aquí análogamente. Se pone $\frac{\alpha}{\beta} \geqslant 0$ si $\alpha\beta \geqslant 0$; $\frac{\alpha}{\beta} \geqslant \frac{\gamma}{\delta}$ si y sólo si $\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\gamma}{\delta} \geqslant 0$ y se demuestran fácilmente las propiedades que permiten considerar ésta como una relación de orden. Se demuestra también que esta relación hace del conjunto de *los números racionales un conjunto totalmente ordenado y que dicha relación es compatible con la adición*, es decir, $\in \geqslant \beta \Leftrightarrow \in + y \geqslant \beta + y$ cualquiera que sea $y \in Q$.

El problema práctico de la medida de magnitudes conduce también a la necesidad de ampliar el campo de los números enteros.

Para medir la longitud de un segmento AB, se compara, como es sabido, con otro CD que se toma como unidad. Si CD está contenido exactamente 3 veces en AB, decimos que la medida AB con la unidad CD es 3, o que $AB = 3\ CD$.

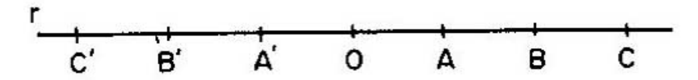
A B

Si no está contenido CD un número exacto de veces en AB, puede ocurrir que dividiendo CD en q partes iguales, una de éstas quepa p veces exactamente en AB. Escribimos entonces:



$$AB = \frac{p}{q}\, CD$$

y decimos que el número fraccionario $\frac{p}{q}$ es la medida de AB con la unidad CD.



Consideremos una recta r y un punto O en ella. A partir de O hay dos sentidos de movimiento sobre la recta. Convendremos en llamar positivo el sentido de O a la derecha y negativo al opuesto. Tomemos un segmento arbitrario OU como unidad, y si en uno y otro sentido llevamos segmentos iguales a OU obtenemos los puntos A, B, C, ..., y A', B', C', ..., que representan los números 1, 2, 3, ...; -1, -2, -3, ... Dado cualquier número entero, para obtener el punto que lo representa llevamos a partir de O en el sentido correspondiente, según sea positivo o negativo, tantos segmentos iguales a OU como unidades tenga. Así, a cada número entero corresponde un punto de la recta r. Para representar un número fraccionario $\pm\, p/q$, dividimos la unidad OU en q partes iguales, y a partir del punto O, en uno u otro sentido, llevamos p segmentos iguales a la $q^{ésima}$ parte de OU. De este modo tenemos representados todos los números racionales por puntos de la recta r. De dos números racionales positivos, el punto que representa el mayor está a la derecha del que representa el menor.

La propiedad más notable de este conjunto de puntos es que es *denso* en toda la recta, lo que quiere decir que en todo intervalo entre dos puntos racionales hay otro y, por tanto, infinitos. Basta, en efecto, ver que si

$$\frac{m}{n} < \frac{p}{q}, \text{ se verifica } \frac{m}{n} < \frac{m+p}{n+q} < \frac{p}{q}$$

lo cual es inmediato. A pesar de esta propiedad, veremos más adelante que los números racionales no *llenan* la recta, si no que hay puntos que no se pueden representar exactamente por números racionales. Sin embargo, como consecuencia de la propiedad anterior, se pueden representar con cuanta aproximación queramos dichos puntos por números racionales. De aquí que suela decirse que para las aplicaciones prácticas son suficientes los números racionales.

EJERCICIOS

1. Probar que el conjunto de los números pares (positivos y negativos y el cero) es un anillo conmutativo, en el que la multiplicación posee elemento neutro.

2. Ordenar el conjunto de números racionales $-1, \frac{11}{5}, \frac{17}{8}, \frac{3}{4}$.

3. Intercalar 5 números racionales entre $\frac{2}{3}$ y $\frac{7}{8}$.

4. Demostrar las propiedades asociativa, distributiva, etc., y ver que Q es un cuerpo.

5. Probar que Q no admite más subcuerpo que él mismo.

6. Si $\varepsilon \in Q$, se puede encontrar n tal que $1/10^n < \varepsilon$.

7. Resolver $x^2 + x - 1 > 0$ en Q.

8. Se consideran los pares de racionales $(a, b) = \alpha$ con la definición:

$$\alpha + \alpha' = (a + a', b + b')$$
$$\alpha \cdot \alpha' = (aa' - bb', ab' + ba')$$

Probar que forman un cuerpo.

[Las soluciones se encuentran en S. Ríos. Problemas de Cálculo Infinitesimal, Madrid, 1968.]

CAPITULO **2**

El número real

1. EL PROBLEMA DE LA MEDIDA

Vimos que el problema de la medida, conduce a la necesidad de introducir los números fraccionarios.

En la práctica, al aplicar el proceso conocido para medir mediante una unidad una longitud dada, se llega siempre a un número fraccionario, pues la división de la unidad no se puede realizar más allá de un cierto límite, a consecuencia de la estructura molecular de la materia.

Sin embargo, es fácil ver por un razonamiento que existen longitudes *inconmensurables*, es decir, tales que una de ellas no contiene un número entero de veces a la otra ni a ninguna de sus partes.

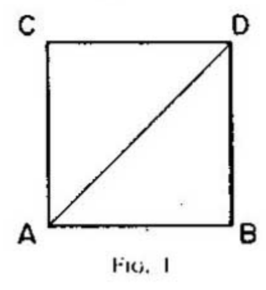


FIG. 1

Si consideramos al cuadrado $ABCD$ (fig. 1) y tomamos como unidad de longitud el lado, se verifica, en virtud del teorema de Pitágoras, que la diagonal

$$AD^2 = AB^2 + BD^2 = 1 + 1 = 2$$

Si la diagonal fuera comensurable con el lado, es decir, su medida racional, tendríamos:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{p}{q}, \text{ luego } \left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2.$$

Veamos que esto es imposible, es decir, que no existe ningún quebrado irreducible cuyo cuadrado sea igual a 2. Si existiera la fracción irreducible p/q, tal que $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$, tendríamos $p^2 = 2q^2$. De aquí se deduce que q es divisor de $p \cdot p$ y como es primo con p, debe dividir a p, lo que es absurdo, pues la fracción p/q no sería irreducible contra la hipótesis (*).

Vemos así que el problema de la medida y el de extracción de raíces de números racionales no se pueden resolver siempre dentro del campo de los números racionales. De modo que, aunque para las aplicaciones prácticas son suficientes los números enteros y los fraccionarios, la Matemática necesita introducir otros números que permitan realizar las operaciones planteadas.

La Aritmética enseña a obtener con cuanta aproximación queramos $\sqrt{2}$.

Las reglas de la Aritmética ponen de manifiesto que los números racionales: 1, 1,4; 1,41; 1,414, ... (llamados *raíces por defecto)*, son tales que sus cuadrados difieren de 2 en tanto menos cuanto más avanzado es su lugar.

A estos mismos números seríamos también conducidos por el problema de la medida de la diagonal.

Al aplicar el lado sobre la diagonal veríamos que está contenido más de una vez, pero menos de dos. Dividiendo el lado en 10 partes iguales comprobaríamos que una de estas partes está contenida en la diagonal más de 14 veces y menos de 15, etc.

Esta sucesión de medidas determina perfectamente la diagonal y, del mismo modo, la sucesión:

$$1,\ 1{,}4,\ 1{,}41,\ 1{,}414,\ \ldots$$

podemos decir que determina la $\sqrt{2}$. Se ve que la diferencia entre términos de la sucesión puede llegar a ser tan pequeña como queramos si los tomamos de un lugar posterior a un cierto valor.

Ahora bien: si anotamos sucesivamente las cifras 1,4142, ... queda completamente definida la sucesión de raíces racionales (por defecto). Es, pues natural representar el símbolo $\sqrt{2}$, o bien, la medida de la diagonal, por la expresión 1,4142 ... con infinitas cifras decimales. Tal número, distinto de las racionales (hasta ahora considerados), se llama *irracional*.

2. NUMEROS DECIMALES DE INFINITAS CIFRAS: RACIONALES E IRRACIONALES

Acabamos de ver que todo número irracional, procedente de la medida de una longitud inconmensurable, tiene una expresión formada con infinitas cifras decimales. ¿Es cierta la recíproca? Evidentemente, no, como lo prueba el nú-

(*) Cuando los matemáticos griegos hicieron este descubrimiento teórico, de importancia comparable a la del *Cálculo infinitesimal*, lo celebraron sacrificando 100 bueyes.

mero racional $2/3 = 0,666\ldots$ cuya expresión decimal, como se ve, consta de infinitas cifras.

Se observa aquí el carácter *periódico* de la fracción decimal, y, en efecto, todo número racional p/q, al reducirlo a forma decimal, da lugar a una expresión finita o bien periódica, pues por ser los restos menores que el divisor q, acabarán repitiéndose y también se repetirán periódicamente las cifras del cociente.

Recíprocamente, en Aritmética elemental se ve que toda fracción decimal periódica (por ejemplo: 5,463838 ...) procede de un número racional *(fracción generatriz)*.

Hemos visto que las expresiones decimales periódicas proceden de números racionales y que éstos engendran siempre fracciones decimales periódicas o bien fracciones decimales finitas, como, por ejemplo: $3/5 = 0,6$.

Podemos unificar la notación conviniendo en representar estos números en la forma periódica, agregando ceros: $3/5 = 0,6000\ldots$

Aún convendría considerar expresiones como 12,7999 ..., cuya fracción es $\frac{127}{10} + \frac{9}{90}$.

Por este motivo, siempre que aparezca una fracción como la 12,7999 ..., la escribiremos en la forma 12,8000 ..., es decir, siempre que en un número decimal todas las cifras, desde una en adelante, son 9, convendremos en sustituirlas por cero, incrementando en 1 la anterior.

Así uniformadas las expresiones decimales, podíamos decir que *un número real es una sucesión cualquiera de infinitas cifras decimales.* Si la sucesión es periódica el número es racional, si no, es irracional.

Las anteriores consideraciones tienen un interés intuitivo por la referencia que hacen a conocimientos anteriores. Conviene, sin embargo, continuar el proceso lógico de extensión de los campos de números y ver a que nos conduce la extensión del cuerpo de los números racionales.

Se comprende que si modificamos algunos números racionales en la representación que hemos dado de $\sqrt{2}$, es decir, tomamos la sucesión:

$$1,3;\ 1,4;\ 1,40;\ 1,414;\ \ldots$$

vamos a obtener el mismo número. Teniendo en cuenta estas posibles representaciones diversas del mismo número parece fundamental introducir una *definición de equivalencia de sucesiones*, que va a ser la base para la formulación rigurosa del concepto de número real.

3. SUCESIONES

Los números:

$$1,\ 2,\ 2^2,\ 2^3,\ 2^4,\ \ldots,\ 2^{n-1},\ \ldots$$

forman una progresión geométrica de razón 2, y se puede calcular inmediata-

mente el término que ocupa un cierto lugar prefijado. Así, el término que está en el décimo lugar, será: $2^{10-1} = 2^9$.

Sucesión numérica es todo conjunto de números,

$$y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$$

tales que a cada número natural n corresponda un número y_n del conjunto, y recíprocamente.

Es decir, es una aplicación biunívoca del conjunto de los números naturales en otro conjunto de números. *En lo que sigue, mientras no se advierta lo contrario, consideraremos sucesiones de numerosos racionales.*

El término y_n se acostumbra a llamar *término general*, y si es conocido en función de n, los términos de la sucesión se obtienen dando en y_n a n los valores 1,2...

EJEMPLOS:

1. La sucesión:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \ldots, \frac{1}{2^{n-1}}, \ldots$$

tiene como término general:

$$y_n = \frac{1}{2^{n-1}}$$

El término que está en el lugar 25 será:

$$y_{25} = \frac{1}{2^{25-1}} = \frac{1}{2^{24}}$$

2. En la sucesión:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$$

el término general es $y_n = \dfrac{n}{n+1}$. Para averiguar el valor del término que ocupa el lugar 20, no hace falta formar todos los anteriores, pues basta hacer $n = 20$ en la expresión del término general, resultando $y_{20} = \dfrac{20}{21}$.

3. Sea la sucesión:

$$2, \frac{1}{2}, -2, -\frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}, -3, -\frac{1}{3}, \ldots$$

El término general tiene estas expresiones:

$$y_{4n+1} = n+2, \quad y_{4n+2} = \frac{1}{n+2}, \quad y_{4n+3} = -(n+2), \quad y_{4n+4} = \frac{-1}{n+2}$$

Se puede tener una imagen intuitiva de una sucesión dada, representando los términos de la sucesión mediante puntos de una recta, cuyas abscisas son dichos términos.

EJEMPLO:

En la figura 2 se han representado las sucesiones de los ejemplos del párrafo anterior.

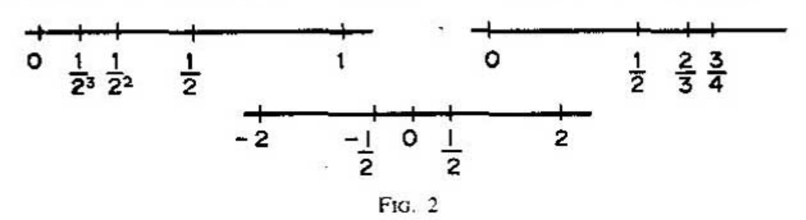


FIG. 2

Una sucesión y_n, *se dice acotada superiormente o mayorada, en valor absoluto, si existe un número* k, *llamado cota, tal que para todos los números de la sucesión es:*

$$|y_n| \leqslant k, \quad \text{es decir,} \quad -k \leqslant y_n \leqslant k$$

En la representación gráfica de una sucesión acotada en valor absoluto todos los puntos están, por tanto, contenidos en un segmento de longitud $2k$, cuyo centro es el origen de abscisas (fig. 3).

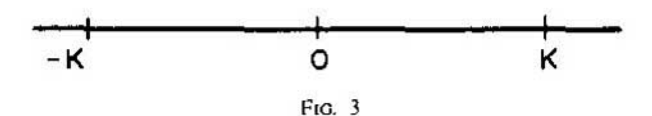


FIG. 3

Es claro que todo número $h > k$ también es una cota de la sucesión.

Análogamente se define una sucesión *acotada inferiormente o minorada*, en valor absoluto si existe $k' > 0$, tal que:

$$|y_n| \geqslant k'$$

EJEMPLOS:

Las sucesiones de los ejemplos 1 y 2 del párrafo anterior son acotadas, pues sus términos son ≤ 1. No lo es la del ejemplo 3.

Una sucesión y_n *se llama monótona creciente si para todo valor de* n *es* $y_n < y_{n+1}$.

Análogamente, *si para todo* n *es* $y_n \geqslant y_{n+1}$ *la sucesión se dice monótona decreciente.*

EJEMPLOS:

1. La sucesión $y_n = \frac{1}{2^{n-1}}$ es monótona decreciente, pues para todo valor de n es: $\frac{1}{2^{n-1}} > \frac{1}{2^n}$.

2. La sucesión $y_n = \frac{n}{n+1}$ es monótona creciente, pues para todo n *se verifica fácilmente que:*

$$\frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+2}$$

4. SUCESIONES NULAS O INFINITESIMAS

En la sucesión:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \ldots \frac{1}{2^{n-1}}, \ldots$$

se verifica que los números de la sucesión llegan a ser tan pequeños como queramos, tomándolos de un lugar suficientemente avanzado. Por ejemplo, a partir del término del lugar 1000, todos son menores que 0,001, a partir del término de lugar 10000, todos son menores que 0,0001, etc. Intuitivamente se ve que a medida que avanzamos en el lugar de la sucesión obtenemos valores más próximos a cero. Nuestra intuición sugiere, pues, una idea dinámica de límite en que al movernos por la sucesión de índices 1, 2, ..., n, ..., en la sucesión nos movemos tomando valores cada vez más próximos a cero. Sin embargo, la formulación matemática del concepto requiere invertir el orden de los movimientos. En vez de recorrer primero la sucesión 1, 2, ..., n, ... y después ver que los valores $1, \frac{1}{2}, \ldots \frac{1}{2^n}, \ldots$, se van aproximando a cero, comenzamos por fijar el número positivo por debajo del cual queremos que queden los valores absolutos de los términos de la sucesión y a continuación vemos desde qué lugar en adelante se verifica esto. Es decir, para que la sucesión sea *nula o infinitésima* o tenga límite cero o tienda a cero ha de verificarse que hemos de poder obtener *términos de valor tan pequeño como queramos* tomándolos de *lugar bastante avanzado.*

La formulación rigurosa del concepto de sucesión nula consiste simplemente en enunciar en forma precisa las dos frases subrayadas, con lo cual se tiene la siguiente *definición: Se dice que la sucesión y_n es una sucesión nula si para todo número arbitrariamente pequeño $\varepsilon > 0$, desde un valor N de n en adelante todos los términos de la sucesión verifican la relación.*

$$|y_n| < \varepsilon$$

Conviene insistir en que para aplicar la definición a cada sucesión y_n hay dos

pasos: 1.º se fija $\varepsilon > 0$; 2.º se ve si es posible determinar N_0 de modo que para $n > N_0$, sea $|y_n| < \varepsilon$.

Si se pueden dar estos dos pasos, por pequeño que sea ε, la sucesión verifica las condiciones de la definición y es *infinitésima* (*).

Indicaremos esto con las notaciones $y_n \to 0$ (que se lee: y_n *tiende a cero)*, o bien: $\lim_{n \to \infty} y_n = 0$ (que se lee: límite de y_n, cuando n tiende a infinito, es cero).

La sucesión 1) del párrafo 3 es una sucesión infinitésima, ya que dado, por ejemplo: $\varepsilon = 1/2^{50}$ a partir del término de lugar 51, todos los términos son menores que ε; dado $\varepsilon = \frac{1}{2^{1000}}$, los términos desde el 1.001 en adelante son menores que ε, etc.

En la representación geométrica (fig. 4), una sucesión infinitésima tiene la propiedad siguiente: fijado un segmento *(entorno)* de longitud 2ε, simétrico respecto del origen, los puntos de la sucesión desde uno en adelante, quedan contenidos en dicho segmento.

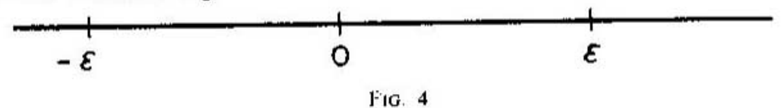


FIG. 4

5. LIMITES

1. *Sucesiones convergentes.*—Si de todos los términos de la sucesión:

$$3,\ 2 + \frac{1}{2},\ 2 + \frac{1}{3},\ 2 + \frac{1}{4},\ \ldots,\ 2 + \frac{1}{n},\ \ldots$$

restamos 2, obtenemos la sucesión infinitésima:

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \ldots\ \frac{1}{n},\ \ldots$$

y dicho número 2 se llama, según sabemos, límite de la sucesión considerada.

En general:

Una sucesión y_n se dice convergente hacia un número b racional si la sucesión $y_n - b$ es infinitesima. El número b se llama límite de la sucesión y_n, y se escribe:

$$\lim_{n \to \infty} y_n = b$$

como consecuencia de la definición de sucesión infinitésima, resulta que el *límite de una sucesión infinitésima es cero*, y tenemos esta otra definición de límite:

(*) El concepto de límite, basado en (ε, N), señala el paso de la Aritmética al Análisis Matemático, y su comprensión es fundamental para toda exposición ulterior. Su formulación rigurosa en la forma actual, que elimina toda idea de movimiento, fué lograda por Cauchy y costó siglos a los matemáticos que se ocuparon de ello desde las famosas paradojas de Zenón. Por esto no es extraño que el alumno tenga ciertas dificultades para comprenderla.

El número b se dirá límite de la sucesión y_n si dado un número $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeño, se puede determinar un número N, de modo que para $n > N$, sea $|y_n - b| < \varepsilon$.

Debe recordarse que la condición $|y_n - b| < \varepsilon$, equivale a cualquiera de estas limitaciones:

$$-\varepsilon < y_n - b < \varepsilon$$

$$b - \varepsilon < y_n < b + \varepsilon$$

$b-\varepsilon$ y_n b $b+\varepsilon$

FIG. 5

Con la representación geométrica esta definición se interpreta del siguiente modo: existe un punto de abscisa b tal que, fijado un segmento de longitud 2ε simétrico respecto a él, llamado *entorno*, los puntos de la sucesión, desde un lugar en adelante, quedan contenidos en dicho segmento (fig. 5).

EJEMPLOS:

1. La sucesión $y_n = 2 - \dfrac{(-1)^n}{n}$ es una sucesión cuyo límite es 2, puesto que la sucesión $y_n - 2 = -\dfrac{(-1)^n}{n}$ es infinitésima. En efecto,

$$\left| -\frac{(-1)^n}{n} \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \quad \text{para} \quad n > \frac{1}{\varepsilon}$$

2. El $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$, puesto que $\dfrac{n}{n+1} - 1 = \dfrac{-1}{n+1} \to 0.$

3. La sucesión:

$$0, 1, 0; \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, \ldots, 0, \frac{1}{n}, \ldots$$

tiene límite cero. Contrariamente a lo que sucede en los ejemplos anteriores, en ésta existen infinitos términos iguales al límite.

6. SUCESIONES REGULARES O DE CAUCHY

Una sucesión de números racionales $\{b_n\}$ se llama *regular* o de *Cauchy* si, fijado $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeño, se puede determinar N (función de ε) tal que $|b_p - b_q| < \varepsilon$ para todo par $p > N$, $q > N$.

Una sucesión nula $\{a_k\}$ es una sucesión regular, pues la condición

$$|a_n| < \varepsilon \qquad \text{para} \quad n > N$$

implica que $|a_p - a_q| \leqslant |a_p| + |a_q| < 2\varepsilon$ para

$$p > N, \; q > N$$

Más aún, *una sucesión* b_n, *tal que existe* $\lim b_n = b$ *es una sucesión regular*, pues:

$$|b_p - b_q| = |b_p - b + b - b_q| \leqslant |b_p - b| + |b - b_q| < \varepsilon + \varepsilon$$

para $p > N$, $q > N$, siendo N convenientemente grande.

La recíproca no es cierta: una sucesión regular puede no tener como límite un número racional. Este es el punto de partida para la introducción del número irracional.

EJEMPLO:

Una sucesión regular no convergente hacia un número racional es:

$$1;\ 1,4;\ 1,41;\ 1,414;\ \ldots$$

La imagen de una sucesión regular sobre un eje es una sucesión de puntos numerados tales que la distancia entre dos de ellos llega a ser tan pequeña como queramos, a condición de tomar los índices convenientemente grandes.

Dos sucesiones regulares $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ se llaman *equivalentes* y se escribe $\{x_n\} \sim \{y_n\}$ si $\{x_n - y_n\}$ es una sucesión infinitésima.

Es inmediato comprobar que esta relación verifica las propiedades de una relación de equivalencia, a saber, reflexiva, recíproca y transitiva.

La demostración de esta última se realiza así: veamos que si

$$\{x_n\} \sim \{y_n\} \quad \text{e} \quad \{y_n\} \sim \{z_n\}$$

$$\text{es} \quad \{x_n\} \sim \{z_n\}$$

En efecto, si $\{x_n - y_n\}$ es infinitésima $|x_n - y_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ para $n > N_1$ y análogamente $|y_n - z_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ para $n > N_2$, luego:

$$|x_n - z_n| = |x_n - y_n + y_n - z_n| \leqslant |x_n - y_n| + |y_n - z_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

para $n > máx\,(N_1, N_2)$.

Mediante la noción de equivalencia $\sim$ de sucesiones regulares introducida, queda clasificado el conjunto E de aquellas en clases de equivalencia disjuntas y el conjunto cociente $E/\sim$ es, por definición, el *conjunto de los números reales*, que representaremos abreviadamente por R. En lo que sigue veremos que las operaciones con sucesiones inducen operaciones con los elementos correspondientes de R y le dan estructura de cuerpo.

7. PROPIEDADES DE LAS SUCESIONES

Toda sucesión regular es mayorada en valor absoluto.

Se tiene $|x_p - x_q| < 1$ para $p > N, q > N$.

Sea $p > N + 1$, tenemos $|x_{N+1} - x_q| < 1$

$|x_q| = |x_q + x_{N+1} - x_{N+1}| \leqslant |x_{N+1}| + |x_q - x_{N+1}| < |x_{N+1}| + 1$

luego si es $K = máx\,(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_N|, |x_{N+1}| + 1)$

este número K es una cota superior.

Toda sucesión regular no infinitésima es minorada en valor absoluto.

La demostración es análoga.

Si prescindimos de los K primeros términos de una sucesión regular $\{x_n\}$ obtenemos una sucesión regular $\{y_n\} = \{x_{k+n}\}$ que es equivalente a la dada.

La regularidad es evidente y la equivalencia resulta, de que:

$$\{y_n - x_n\} = \{x_{n+k} - x_n\}$$

que es nula por la regularidad de $\{x_n\}$.

8. SUMA DE SUCESIONES REGULARES

Se llama *suma* de dos sucesiones regulares $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ la sucesión:

$$\{s_n\} = \{x_n + y_n\}$$

La $\{s_n\}$ es regular, pues:

$$|s_p - s_q| = |x_p - x_q + y_p - y_q| \leqslant |x_p - x_q| + |y_p - y_q| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

para $(p, q) > Máx\left[N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right), N_2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right]$, siendo $N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$, $N_2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ los índices a partir de los cuales se verifica, respectivamente:

$|x_p - x_q| < \frac{\varepsilon}{2}$, $|y_p - y_q| < \frac{\varepsilon}{2}$. Si $\{\xi_n\} \sim \{x_n\}$ y $\{\eta_n\} \sim \{y_n\}$ la suma

$$\{\sigma_n\} = \{\xi_n + \eta_n\} \sim \{x_n + y_n\} = \{s_n\}.$$

Para que $|s_n - \sigma_n| \leqslant |x_n - \xi_n| + |y_n - \eta_n| < \varepsilon$

basta que $n > N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$, $n > N_2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ siendo estos los valores a partir de los cuales es:

$$|x_n - \xi_n| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |y_n - \eta_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

La propiedad asociativa y conmutativa resultan de que son válidas para los números racionales que forman las sucesiones.

Que el elemento 0, igual a cualquier sucesión infinitésima, es neutro resulta inmediatamente de la definición de sucesiones equivalentes.

Se define la *sucesión opuesta* a $\{x_n\}$ por $\{-x_n\}$; y de este modo definimos $\{y_n\} - \{x_n\} = \{y_n\} + \{-x_n\} = \{y_n - x_n\}$. Es inmediato que $\{x_n\} + \{-x_n\}$ es una sucesión nula.

Hemos visto así que $(R, +)$, es decir, el conjunto de los números reales respecto de la adición, es un *grupo abeliano*.

9. PRODUCTO DE SUCESIONES REGULARES

Se llama *producto* de las sucesiones regulares $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ a la sucesión

$$\{p_n\} = \{x_n y_n\}$$

Veamos que $\{p_n\}$ es *regular*.

Se tiene:

$|p_q - p_n| = |x_q y_q - x_n y_n| = |x_q(y_q - y_n) + y_n(x_q - x_n)|$ y si A y B son las correspondientes cotas, será:

$$|p_q - p_n| < A\,|y_q - y_n| + B\,|x_q - x_n|$$

luego, tomando q y n mayores que N_1, será: $|y_q - y_n| < \frac{\varepsilon}{2A}$

y tomando q y n mayores que N_2, será: $|x_q - x_n| < \frac{\varepsilon}{2B}$

y tomando q y n mayores que *máx* (N_1, N_2), será:

$$|p_q - p_n| < A\,\frac{\varepsilon}{2A} + B\,\frac{\varepsilon}{2B} = \varepsilon.$$

Análogamente se demuestra que si $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ se sustituyen por sucesiones equivalentes, la sucesión producto es equivalente a $\{p_n\}$ y que el producto de dos sucesiones no equivalentes a cero, no es equivalente a cero.

Sea $\{x_n\}$ regular y no nula. Si a es su minorante, será: $|x_n| > a$ para $n > N_1$. Definiremos la sucesión $\{ y_n \}$, que llamaremos *recíproca* de la $\{ x_n \}$, así:

$$y_n = 0 \text{ , para } n \leqslant N_1$$

$$y_n = \frac{1}{x_n} \text{ para } n > N_1$$

Resulta así que $\{ x_n y_n \}$ tiene sus N_1 primeros términos 0 y los restantes 1, luego es $\{ x_n y_n \} \sim \{ 1 \}$.

Se demuestra fácilmente:

1.º La recíproca de una sucesión regular y no nula es regular y no nula.

2.º Si $\{ x_n \} \sim \{ \xi_n \}$ sus recíprocas son equivalentes.

Podemos resumir esto diciendo que el producto es una ley de composición, estable respecto de la relación de equivalencia y, por tanto, podemos llamar *producto de números reales* al número real definido por la sucesión producto de dos sucesiones cualesquiera que representen los factores.

Se demuestra fácilmente que el producto es asociativo y conmutativo y que las sucesiones equivalentes a $\{ 1 \}$ forman el *elemento neutro.*

Es decir, en definitiva, *los elementos no nulos de R forman un grupo respecto de la multiplicación.*

Como consecuencia resulta que los números reales forman un *cuerpo conmutativo.* Para demostrar esto basta añadir a lo dicho hasta aquí la propiedad distributiva, es decir:

$$[\{ x_n \} + \{ y_n \}] \times \{ z_n \} = \{ x_n \} \times \{ z_n \} + \{ y_n \} \times \{ z_n \}$$

cuya verificación es inmediata.

El cuerpo R de los números reales contiene un subcuerpo isomorfo al cuerpo Q de los números racionales. Basta considerar la sucesión $\{ x_n \} = \{ \frac{p}{q} \}$ como homóloga del racional $\frac{p}{q}$. Se comprueba que esta correspondencia biunívoca conserva las leyes de suma y producto. Siguiendo un procedimiento corriente se identifican ambos cuerpos.

10. REPRESENTACION DECIMAL DE LOS NUMEROS REALES

Vamos a indicar como se demuestra que *existe una correspondencia* 1 : 1 *entre el conjunto R de los números reales y el conjunto de los números decimales de infinitas cifras.*

Los pasos sucesivos para probar ésto son:

1.° Se asocia a un número decimal ilimitado, por ejemplo: 3.1415 ..., la sucesión $x_0 = 3$; $x_1 = 3{,}1$; $x_2 = 3{,}14$; ... y se demuestra que esta sucesión es regular.

2.° Si son equivalentes las sucesiones regulares asociadas a dos números decimales ilimitados, estos números tienen las mismas cifras. El único caso de excepción a esta propiedad es el de números del tipo 0,4999, ... y 0,5000, ..., en que ambos dan la misma sucesión $\{ {}^1/_2 \}$.

3.° Toda sucesión regular $\{ x_n \}$ es equivalente a un número decimal ilimitado. Para ésto se define la sucesión u_n por la desigualdad:

$$u_n = \frac{a}{10^n} \leqslant x_n \leqslant \frac{a+1}{10^{n+1}} \text{ (a entero).}$$

Se demuestra a) *que en la sucesión de las* u_n, *existe un lugar* r_1 *a partir del cual todos comienzan por la misma cifra; existe un lugar* r_2 *a partir del cual comienzan todos por las dos mismas primeras cifras, etc.;* b) *se demuestra que* $\{ x_n \} \sim \{ u_{r_k} \}$.

Se puede ver que *la correspondencia definida es un isomorfismo y que los métodos de cálculo de suma y producto de números decimales conservan su validez.*

11. SUCESIONES MONOTONAS CONTIGUAS. REPRESENTACION GEOMETRICA DE LOS NUMEROS REALES

Llamaremos *par de sucesiones monótonas contiguas o de intervalos encajados* (a_n, a'_n) a dos sucesiones indefinidas de números racionales:

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \dots \leqslant a_n \leqslant \dots$$
$$a'_1 \geqslant a'_2 \geqslant \dots \geqslant a'_n \geqslant \dots$$

tales que:

1.° La primera es monótona, no decreciente; y la segunda, monótona, no creciente.

2.° Todo número de la primera es menor que el correspondiente de la segunda $a_n < a'_n$.

3.° La diferencia $a'_n - a_n$ llega a ser menor que cualquier número $\varepsilon > 0$ tan pequeño como se quiera, desde un valor de n en adelante.

Por ejemplo: El par de sucesiones:

$$0{,}3 \leqslant 0{,}33 \leqslant 0{,}333 \leqslant \dots$$
$$0{,}4 \geqslant 0{,}34 \geqslant 0{,}334 \geqslant \dots$$

verifica las tres condiciones anteriores. La diferencia $a'_n - a_n = 0{,}1^n$ es $< \varepsilon$ para n suficientemente grande (determine el lector n, si $\varepsilon = 0{,}005$).

Se ve que el par de sucesiones monótonas convergentes a_n, a'_n define una sucesión $I_n = (a_n, a'_n)$ de *intervalos o segmentos encajados*, es decir, cada uno contenido en el anterior y cuya longitud tiende a cero por la condición tercera.

Llamaremos *elemento de separación o frontera* del par de sucesiones o del *encaje de intervalos* a todo número que esté contenido en todos ellos. Existe a lo sumo un número racional contenido en todos los intervalos, ya que si existieran dos x_1, x_2, sería $|a'_n - a_n| \geqslant |x_1 - x_2|$ para todo n, lo que es contradictorio con la condición tercera. Pero puede ocurrir que *no exista* ningún número racional contenido en todos los intervalos, como vimos anteriormente.

Vamos a ver que en tal caso *existe un número irracional* para llenar la laguna. En efecto, es inmediato ver que la sucesión $a_1, a'_1, a_2, a'_2, \ldots$, es regular y define un número real X que es común a todos los intervalos, puesto que $X - a_n$ es una sucesión positiva y $a'_n - X$ es una sucesión negativa. No puede existir otro número X' con la misma propiedad, pues sería $|a'_n - a_n| > |X' - X|$ y el primer miembro no podría tender a cero.

Para representar un número irracional sobre una recta, en la que se ha elegido un origen y una unidad positiva, por ejemplo, el $\sqrt{2} = 1{,}4142; \ldots$, representaremos sobre la recta r los números racionales 1; 1,4; 1,41; 1,414; ..., aproximados por defecto y también los aproximados por exceso: 2; 1,5; 1,42; 1,415; ... (fig. 6). Todos estos puntos están situados a la derecha de los anteriores. ¿Habrá un punto P situado a la derecha de los primeros y a la izquierda de los segundos?

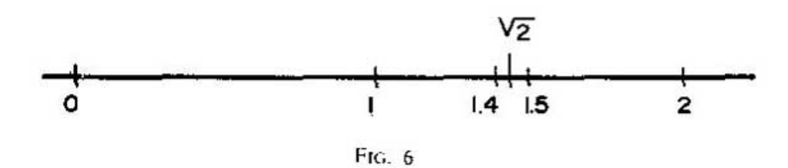


FIG. 6

A esto contesta el *Postulado de continuidad de Cantor. Dada una sucesión de segmentos encajados A_nB_n* (fig. 7) *existe un punto contenido en todos ellos.*

Este postulado permite representar el número real definido por las sucesiones (a_n, a'_n) o cualquiera de sus equivalentes por el punto P.

De este modo vemos que *a todo número real corresponde un punto de la recta y, recíprocamente, de lo dicho al estudiar la medida de segmentos se deduce que a cada punto P de la recta corresponde un número real, que es la medida del segmento OP*. Tal número se llama *abscisa* de P.

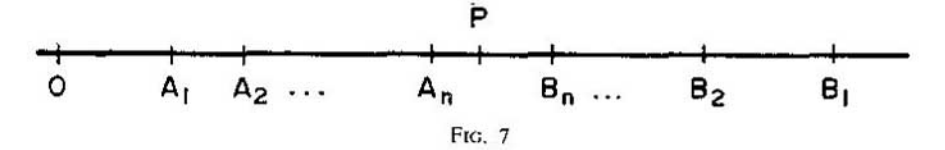


FIG. 7

12. RAIZ ARITMETICA DE UN NUMERO REAL

Vamos a abordar ahora el problema de cálculo de raices como $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, etcétera, que ha dado origen al número real.

Más general, *dado un número real positivo cualquiera* A *se pueden determinar dos números racionales* $\frac{a}{n}, \frac{a+1}{n}$ *que difieran en* $\frac{1}{n}$ *y tales que* A *esté comprendido entre las potencias m-simas de dichos números*, es decir:

$$\left(\frac{a}{n}\right)^m \leqslant A < \left(\frac{a+1}{n}\right)^m \qquad [1]$$

Esta condición equivale a escribir:

$$a^m \leqslant A \cdot n^m < (a+1)^m$$

Para que se cumpla esta condición basta que, si es B la parte entera de $A \cdot n^m$, sea:

$$a^m \leqslant B < (a+1)^m$$

es decir, que a *sea la raíz entera por defecto de la parte entera de* $A \cdot n^m$.

Resuelto este primer problema, podemos formar las sucesiones:

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a'_2 \leqslant a'_1$$

en que a_i, a'_i son las raíces racionales por defecto y exceso en menos de $\frac{1}{n^i}$, viéndose inmediatamente que son clases contiguas y definen, por tanto, un número real a, cuya potencia m-sima es:

$$a^m = (a_1^m, a_2^m, a_3^m, \ldots, a_3'^m, a_2'^m, a_1'^m)$$

y del cual se demuestra que es $a^m = A$. Este número a único que verifica la relación $a^m = A$, se llama *raíz m*-sima aritmética de A, y se representa $a = \sqrt[m]{A}$.

EJEMPLO:

Para calcular $\sqrt{2}$, obtenemos las raíces en menos de 0,1, en menos de 0,01, etc. Para esto obtenemos $14 \leq \sqrt{2 \cdot 10^2} \leq 15$ luego $1{,}4 \leq \sqrt{2} \leq 1{,}5$, etc.

13. ALGUNAS PROPIEDADES DEL CUERPO DE LOS NUMEROS REALES

Si a es un número de R, diremos que $a > 0$ si existe una sucesión regular $\{u_n\}$ tal que $u_n > r \geqslant 0$ en que r es racional. Cualquier otra sucesión regular $\{v_n\}$ equivalente a $\{u_n\}$ está formada por números $v_n > 0$ salvo un número finito. Diremos que $a \geqslant 0$ si es $a > 0$, o bien $a = 0$. Diremos que $a \geqslant a'$ si y sólo si $a - a' \geqslant 0$. Con esta relación de orden, se demuestra que el *conjunto de los números reales es totalmente ordenado*.

Se llama *valor absoluto* de X y se designa por $|X|$ el elemento positivo del par $X, -X$, cuando $X \neq 0$. Las propiedades fundamentales son $|XY| = |X| \cdot |Y|$; $|X+Y| \leqslant |X| + |Y|$.

Otra propiedad importante es que *R es un cuerpo arquimediano*, es decir, que si a, b son dos números tales que $0 < a < b$, existen enteros p tales que $p \cdot a > b$.

Una consecuencia de esta propiedad, que dejamos como ejercicio al lector, es que, dado un número real A, se pueden encontrar dos racionales que aproximan A en menos de un $\varepsilon = 10^{-n}$ prefijado. En efecto, como $0 < 10^{-n} < A$, al considerar la progresión $1.10^{-n}, 2.10^{-n}, \ldots, k \cdot 10^{-n}, \ldots$, en ella hay números mayores que A. Si es $k \cdot 10^{-n}$ el menor de ellos, tendremos $(k-1) \cdot 10^{-n} < A < k \cdot 10^{-n}$.

Esta propiedad se puede expresar también diciendo que *el conjunto de los números racionales es denso en el de los reales*, es decir, que dado un número real cualquiera existen números racionales tan próximos a él como queramos.

Un problema interesante, que se presenta de modo natural, es saber si al aplicar el proceso de ampliación del campo de los números racionales al campo de los números reales se obtendrán nuevos números.

Se demuestra tras generalizar las nociones de límite, sucesión nula, etc., que la contestación es negativa, es decir, que las sucesiones regulares de números reales no engendran nuevos números. Esta propiedad, que no demostramos aquí, se enuncia brevemente diciendo que *el cuerpo de los números reales es completo*, es decir, que no se agregan nuevos números por el paso al límite mediante sucesiones regulares de números reales.

Más precisamente este resultado se enuncia en la siguiente forma, que suele llamarse *criterio de convergencia de Cauchy: una condición necesaria y suficiente para que una sucesión de números reales tenga límite, es que sea regular.*

La propiedad de las sucesiones contiguas de números racionales vale con análoga demostración para las sucesiones contiguas de números reales. Se enuncia así: *Si se tiene un par de sucesiones contiguas de números reales:*

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a'_2 \leqslant a'_1$$

tales que $a'_n - a_n$ *se puede hacer* $< \varepsilon$ *para* n *suficientemente grande, existe un número real único contenido en todos los intervalos cerrados* $[a_n, a'_n]$.

EJERCICIOS

1. Un punto se mueve con velocidad constante v recorriendo el perímetro $ABCD$ de un cuadrado, y otro tiene el mismo movimiento uniforme de ida y vuelta sobre una diagonal AC. Probar que si los dos móviles parten simultáneamente de A no volverán a encontrarse.

2. El mismo ejercicio, suponiendo que uno de los móviles describe una circunferencia y el otro un diámetro AC.

3. Si los dos móviles del problema número 1 parten de distintos instantes de A, ¿qué casos de encuentro pueden presentarse?

4. Dar un ejemplo en que, partiendo con un intervalo inferior a un minuto, tarden un año en encontrarse.

5. Los mismos problemas con la circunferencia y el diámetro.

6. ¿Son inconmensurables el lado del triángulo equilátero inscrito y el radio de la circunferencia? Idem, el lado del cuadrado y del exágono.

7. Reducir a decimales las siguientes fracciones:

$$\frac{1}{4}, \frac{7}{125}, \frac{9}{40}, \frac{12}{22}, \frac{7}{33}$$

8. Determinar las fracciones generatrices de las fracciones decimales siguientes:

$$0{,}9090, \quad 0{,}333, \quad 2{,}4545, \quad 0{,}833, \quad 0{,}2121, \quad 0{,}5454$$

9. Expresar en millas por minuto una velocidad de 60 km. por hora.

10. Demostrar que si x e y son dos números racionales positivos tales que $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$ son irracionales, la suma $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ es irracional.

CAPITULO 3

Teoría axiomática del número real

1. AXIOMAS DE LOS NUMEROS REALES

Como ya se indicó, tras la anterior exposición de las ampliaciones sucesivas del concepto de número hasta llegar a las principales propiedades de los números reales por método genético, vamos a tomar algunas de ellas, formulándolas en forma de axiomas, como punto de partida para la teoría posterior del número real, base fundamental del Cálculo infinitesimal.

Admitiremos que el conjunto R de los números reales es un *cuerpo*; es decir, que en él están definidas dos operaciones, suma y producto, con las siguientes propiedades:

Ax. *I* $x + (y + z) = (x + y) + z$.

Ax. *II* $x + y = y + x$.

Ax. *III* *Existe un elemento neutro* 0, *tal que* $x + 0 = x$ *para todo* $x \in R$.

Ax. *IV* *Para todo* $x \in R$ *existe un elemento simétrico* $-x$, *tal que* $x + (-x) = 0$.

Ax. *V* $x(yz) = (xy)z$.

Ax. *VI* $xy = yx$.

Ax. *VII* *Existe un elemento neutro* $1 \in R$, *tal que, para todo* $x \in R$ *es* $1 \cdot x = x$.

Ax. *VIII* *Para cada* $x \neq 0$ *existe un elemento simétrico* $x^{-1} \in R$, *tal que* $x \cdot x^{-1} = 1$.

Ax. *IX* $x(y + z) = xy + xz$.

Estos son los axiomas, gracias a los cuales se puede operar con los números reales de acuerdo con las leyes usuales de la Aritmética. Por ejemplo: $-(x - y) = -x + y$; $-(x^{-2})^2 = -x^{-4}$.

A estos axiomas se agregan los siguientes de *ordenación:*

Ax. X *Si* $x \leqslant y$ *e* $y \leqslant z$, *es* $x \leqslant z$

Ax. XI *Si* $x \leqslant y$ *e* $y \leqslant x$, *es* $x = y$.

Ax. XII *Para dos elementos cualesquiera o es* $x \geqslant y$ *o* $y \geqslant x$.

Ax. XIII *Si es* $x \leqslant y$, *es* $x + z \leqslant y + z$.

Ax. XIV *Si es* $0 \leqslant x$ y $0 \leq y$, *es* $0 \leq x \cdot y$.

De estos resultan las reglas corrientes para el cálculo con desigualdades.
Así: Si $x \leqslant y$ será $x \cdot z \leqslant y \cdot z$, si $z > 0$, y será $x \cdot z \geqslant yz$ si $z < 0$.
La relación $x < y$ significa $x \leqslant y$ y además $x \neq y$.

Otros dos axiomas fundamentales son:

Ax. XV *(de Arquímedes).* R *es un cuerpo arquimediano: es decir, para todo par de números reales* x, y, *tales que* $0 < x < y$, *existe un entero* n *tal que* $nx \geqslant y$.

Ax. XVI *Dada una sucesión de intervalos encajados cerrados* $[a_n, b_n]$, *es decir, tales que* $a_n \leqslant a_{n+1} < b_{n+1} \leqslant b_n$ *la intersección de esta sucesión de conjuntos no es vacía; es decir, hay al menos un punto común a todos ellos.*

2. VALOR ABSOLUTO

El *valor absoluto* de un número real a representado por $|a|$, se define:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a > 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Se tienen las siguientes propiedades de fácil demostración:

1) $|a| = 0$ *equivale a* $a = 0$.

2) $|-a| = |a|$ *para todo* a.

3) $|ab| = |a| \cdot |b|$.

4) Si $c \geqslant 0$, $|a| \leqslant c$ *equivale a:* $-c \leqslant a \leqslant c$.

5) $-|a| \leqslant a \leqslant |a|$ *para todo* a.

Demostremos 4). Si $|a| \leqslant c$, se verifica $a \leqslant c$ y $-a \leqslant c$. De esta última resulta $-c \leqslant a$, luego $-c \leqslant a \leqslant c$. Recíprocamente si se verifica $-c \leqslant a \leqslant c$ tenemos $-a \leqslant c$ y $a \leqslant c$, luego $|a| \leqslant c$.
Para demostrar 5) basta observar que $|a| \geqslant 0$.
Otra propiedad muy usada es la *desigualdad triangular.*

Para todo par de números reales es:

$$||a| - |b|| \leqslant |a + b| \leqslant |a| + |b|$$

Por la propiedad 5) es:

$$-|a| \leqslant a \leqslant |a|$$

y como:

$$|b| = |-b|$$

tenemos:

$$-|b| \leqslant \pm b \leqslant |b|$$

luego:

$$-(|a| + |b|) < a \pm b < |a| + |b|$$

De 4) resulta:

$$|a \pm b| \leqslant |a| + |b|$$

Como:

$$|a| = |a - b + b| \leqslant |a - b| + |b|$$

resulta:

$$|a| - |b| \leqslant |a - b|$$

Análogamente:

$$|b| - |a| \leqslant |a - b|$$

luego:

$$||a| - |b|| \leqslant |a - b|$$

Sustituyendo b por $-b$, se obtiene:

$$||a| - |b|| \leqslant |a + b|$$

Esto se generaliza, por inducción, a n sumandos:

$$|a_1 + a_2 + \dots + a_n| \leqslant |a_1| + \dots + |a_n|$$

3. COTAS. SUPREMO E INFIMO

Sea S un subconjunto de los números reales R. Un número real u se llama *cota superior* de S si $s \leqslant u$ para todo $s \in S$. Análogamente se define w como *cota inferior* de S por la condición $w \leqslant s$ para todo $s \in S$.

EJEMPLO:

1) Para el conjunto $0 < x < 1$

1 es una cota superior y 2 es otra. $0 y -3$ son cotas inferiores.

2) El conjunto $x = 0$ no tiene cota superior.

Un conjunto que tiene cota superior se dice *acotado superiormente* y análogamente si tiene cota inferior se dice *acotado inferiormente*. Si tiene ambas se dice *acotado* y si le falta alguna se dice *no acotado*.

Sea S un subconjunto de R acotado superiormente. La menor de las cotas superiores de S se llama *supremo* o *mínima cota superior* de S. Si S es acotado inferiormente, la mayor de las cotas inferiores se llama *ínfimo o máxima cota inferior de* S.

Se denotan:

$$\sup S, \quad \inf S$$

La definición de que $u = \sup S$, equivale a 1.°) para todo $s \in S$, $s \leqslant u$.

2.°) si $s < v$ para todo $s \in S$, es $u < v$.

De aquí resulta inmediatamente la unicidad de u. Pues, si existieran dos supremos u_1, u_2 por 2.° tendríamos $u_1 \leqslant u_2 \leqslant u_1$, luego $u_1 = u_2$.

Análogamente se demuestra la unicidad del ínfimo.

Otra manera de caracterizar el supremo, nos da la siguiente propiedad:

Si $u = \sup S$ *se verifica:*

1.° *No hay elementos* $s \in S$ *tales que* $s > u$.

2.° *Si* $v < u$ *hay un elemento* $s \in S$ *tal que* $v < s$ *y recíprocamente.*

Por ser $u = \sup S$, se verifica 1.° evidentemente. Si $v < u$, v no es una cota de S, luego existe al menos un $s \in S$ tal que $v < s$.

Recíprocamente 1.° implica que u es una cota de S. Si u no fuera supremo existiría otra cota $v < u$ y por 2.° habría un $s \in S$ tal que $v < s$. Pero entonces v no sería una cota superior con lo que tenemos una contradicción.

Si consideramos el conjunto $0 < x < 1$, el supremo es 1, que evidentemente no pertenece al conjunto.

Una propiedad fundamental de los conjuntos de números reales es: *todo conjunto no vacío y acotado superiormente (inferiormente) de números reales tiene supremo (ínfimo).*

Sea S un conjunto no vacío, b una de sus cotas superiores y a un número

que no es cota superior. Evidentemente, $a < b$. Sea $I_1 = [a, b]$ y $m_1 = \frac{a + b}{2}$. Si m_1 es una cota superior de S, llamamos $I_2 = [a, m_1]$ y en caso contrario llamamos $I_2 = [m_1, b]$.

Análogamente llamamos m_2 al punto medio de I_2 y con el mismo criterio anterior elegimos I_3. Tenemos así una sucesión de intervalos encajados $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots$ los cuales tienen un punto común x, que vamos a probar es el supremo de s.

Sea c tal que $c < x$, luego $x - c > 0$ y para n suficientemente grande será: longitud de:

$$I_n = \frac{b - a}{2^{n-1}} < x - c.$$

Como $x \in I_n$, será $c < a_n \leqslant x \leqslant b_n$. Pero a_n no es una cota superior de S, luego existe un elemento $s_1 \in S$ tal que $c < a_n < s_1$, por tanto, x es el supremo de S.

Se ha visto en la demostración que el recurso fundamental es el axioma de completitud. Se puede demostrar que si se admite como axioma la existencia de supremo para un cuerpo ordenado, resultan como consecuencia la propiedad de Arquímedes y la de completitud.

Teorema:

Sean A y B dos conjuntos de números reales tales que $a = \sup A, b = \sup B$ y sea C el conjunto de todos los $c = a + b$, siendo $a \in A$, $b \in B$. Se verifica $\sup C = \sup A + \sup B$.

Desde luego, $c = a + b$ es una cota superior de C. Sea c' otra cota superior de C. Vamos a demostrar que $c \leqslant c'$. Sea $\varepsilon > 0$ cualquier número fijado. Existen $x \in A$, $y \in B$ tales que $x > a - \varepsilon$, $y > b - \varepsilon$,

o sea:

$$x + y > a + b - 2\varepsilon$$

y como:

$$x + y \leqslant c' \text{ por hipótesis,}$$

será:

$$a + b \leqslant c' + 2\varepsilon,$$

o sea:

$$c \leqslant c' + 2\varepsilon$$

y como ε es arbitrario, resulta:

$$c \leqslant c' \qquad c \cdot q \cdot d.$$

EJERCICIOS

1. Determinar cotas superiores e inferiores y el supremo y el ínfimo para los siguientes conjuntos:

$$A = \{ x \mid x < 1 \};\ B = \{ x \mid 0 \leq x^2 < 4 \};\ C = \{ x \mid x^2 > 5 \};$$
$$D = \{ x \mid 4x^2 - 4x + 1 \leq 0 \}$$

Decir si dichos supremos e ínfimos pertenecen o no al conjunto.

2. Sea $a = \sup A$, $b = \sup B$. Se considera el conjunto C tal que $x \cdot y \in C$ si $x \in A$, $y \in B$. Probar que en general no se puede afirmar que $\sup C = a \cdot b$.

3. Ver que los intervalos abiertos $\left(0, \frac{1}{n}\right)$ no tienen un punto común.

4. Ver que los conjuntos no acotados $C_n = \{ x \mid x \geq N \}$, $(N = 1, 2, \ldots)$ no tienen un punto común.

5. Demostrar por inducción que un conjunto finito de números reales no vacío tiene supremo e ínfimo.

6. Probar que si F es un cuerpo ordenado en que cada conjunto no vacío tiene supremo e ínfimo es arquimediano y posee la propiedad de completitud.

7. Probar que la unión de dos conjuntos acotados es un conjunto acotado. ¿Vale la propiedad para infinitos conjuntos?

8. El mismo problema para la intersección.

CAPITULO **4**

El número complejo

1. INTRODUCCION

Ejemplos de operaciones que no se saben realizar en el campo de los números reales son:

$$\sqrt{-2}, \quad (-4)^{3/4}, \qquad \log(-2).$$

Especialmente la obtención de raíces de índice par de números negativos y la resolución de ecuaciones algebraicas sin raíces reales, puede decirse que han sido los problemas que dieron origen a la creación del número complejo. Gracias a su introducción se logró probar que toda ecuación de 2.° grado tiene *siempre* dos raíces y que toda ecuación de grado n tiene *siempre* n raíces.

La manera «tradicional» de introducir el número complejo consistía en poner: $\sqrt{-a} = \sqrt{a \cdot (-1)} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{-1}$ e introducir el símbolo i para representar $\sqrt{-1}$, con lo que:

$$\sqrt{-a} = i\sqrt{a} = \pm\, ia',$$

siendo $\sqrt{a} = \pm\, a'$. Con los números así definidos se operaba algebraicamente como si i fuera una variable, poniendo $i^2 = -1$.

2. DEFINICION Y OPERACIONES

Consideramos el espacio producto $R \times R$ y llamaremos *número complejo* a un par ordenado (a, b) de números reales.

Igualdad. Se define $(a, b) = (a', b')$ *cuando y sólo cuando* $a = a', b = b'$.

Suma. Se define la suma $(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$.

Multiplicación. El producto de dos complejos, se define:

$$(a, b) \cdot (a', b') = (aa' - bb', ab' + a'b).$$

Se demuestra fácilmente las propiedades fundamentales que hacen del *campo de los números complejos un cuerpo* C.

He aquí, como ejemplo, la demostración del *axioma de distributividad.*

$$a \cdot (b + c) = (a_1, a_2)[(b_1, b_2) + (c_1, c_2)] = (a_1, a_2)(b_1 + c_1, b_2 + c_2) =$$

$$= [a_1(b_1 + c_1) - a_2(b_2 + c_2), a_1(b_2 + c_2) + a_2(b_1 + c_1)] =$$

$$= [a_1b_1 - a_2b_2 + a_1c_1 - a_2c_2, a_1b_2 + a_2b_1 + a_1c_2 + a_2c_1] =$$

$$= (a_1, a_2)(b_1, b_2) + (a_1, a_2)(c_1, c_2) = a \cdot b + a \cdot c.$$

El elemento neutro para la suma es (0, 0) *y para el producto es* (1, 0).

Dados dos complejos $a = (a_1, a_2)$ y $b = (b_1, b_2)$ *existe otro complejo* $c = (c_1, c_2)$ *tal que* $b = a + c$.

De las condiciones $b_1 = a_1 + c_1$, $b_2 = a_2 + c_2$, resulta $c_1 = b_1 - a_1$, $c_2 = b_2 - a_2$, es decir: $c = b + (-a)$.

Si $a = (a_1, a_2) \neq (0, 0)$ definimos el *inverso* de a por:

$$a^{-1} = \left(\frac{a_1}{a_1^2 + a_2^2}, \frac{-a_2}{a_1^2 + a_2^2} \right)$$

Se comprueba que $a \cdot a^{-1} = (1, 0)$.

Dados dos complejos $a = (a_1, a_2) \neq (0, 0)$ y $b = (b_1, b_2)$ *existe* c, *tal que* $b = a \cdot c$.

Basta poner $c = ba^{-1}$ y se comprueba que se verifica:

$$b = a \cdot c = aba^{-1} = b$$

La primera componente del complejo $z = (a, b)$ se llama su *parte real* y se escribe $a = R(z)$ y la segunda se llama su *parte imaginaria* y se escribe $b = I(z)$.

El conjunto de los números complejos de parte imaginaria nula es isomorfo al de los números reales, pues se tiene:

$$(a, 0) + (a', 0) = (a + a', 0)$$

$$(a, 0) \cdot (a', 0) = (a \cdot a', 0)$$

Esto permite escribir $a = (a, 0)$.

Se llama *unidad imaginaria* al número (0, 1). De la definición de producto, resulta:

$$(0,\ 1) \cdot (0,\ 1) = -1$$

Se suele designar $(0,\ 1) = i$ con lo que $i^2 = -1$.

Además, tenemos:

$$(b,\ 0) \cdot (0,\ 1) = (0,\ b)$$

o sea:

$$b \cdot i = (0,\ b)$$

Como $(a,\ b) = (a,\ 0) + (0,\ b)$,

resulta:

$$(a,\ b) = a + bi$$

que es la llamada *forma binómica* de los números complejos.

Esta forma permite aplicar las mismas reglas de suma y producto del campo real, únicamente sustituyendo i^2 por -1.

Tenemos, pues:

$$(a + bi) + (a' + b'i) = a + a' + i(b + b')$$

$$(a + bi) \cdot (a' + b'i) = (aa' - bb') + i(ab' + a'b).$$

3. NO ORDENACION DEL CUERPO

Una diferencia importante con el cuerpo de los números reales es que *en el cuerpo de los números complejos no es posible establecer una ordenación con las propiedades enunciadas para los números reales.* Una breve demostración de esta imposibilidad es la siguiente: puesto que $i \neq 0$, será $i > 0$, o $i < 0$. Supongamos $i > 0$. Por axioma *XIV*, será $i^2 > 0$, esto es, $-1 > 0$. Sumando $1 = 1$ tenemos $0 > 1$. Si aplicamos el axioma *XIV* a $-1 > 0$, resulta $(-1) \cdot (-1) > 0$, esto es, $1 > 0$. Es decir: $1 > 0$, $0 > 1$, lo cual contradice el axioma *XII*. Análoga contradicción se obtiene si partimos de $i > 0$.

4. REPRESENTACION GEOMETRICA

De modo análogo a como hemos establecido una correspondencia biunívoca entre los puntos de una recta y los números reales, se puede establecer una correspondencia entre los puntos de un plano y los pares ordenados de números reales.

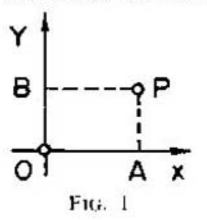


FIG. 1

Para ello, tracemos dos rectas perpendiculares $X'X$, $Y'Y$, que llamaremos, respectivamente, *eje de abscisas y de ordenadas*, y fijemos por una flecha el sentido positivo a partir del *origen* O en cada uno de ellos, así como la unidad de longitud. Dado un punto P del plano, tracemos por él una perpendicular PA al eje de abscisas OX, y otra PB al eje de ordenadas.

El número $a = OA$ se llama *abscisa* de P y el $b = OB$ *ordenada* de P, y el complejo (a, b) queda determinado unívocamente por P.

Dado el complejo (a, b), es inmediato obtener el punto P, llamado su afijo, pues basta tomar sobre el eje de abscisas $OA = a$, y sobre el eje de ordenadas $OB = b$, trazar por A y B sendas perpendiculares a los ejes OX, OY, y su intersección es P.

5. COMPLEJOS CONJUGADOS

Dos números complejos (c, d) y (c', d') se llaman *conjugados* cuando representan dos puntos simétricos respecto del eje de abscisas y, por tanto, tienen las primeras componentes iguales, y las segundas son del mismo valor absoluto y signos opuestos, o sea:

$$c = c' \qquad d = -d'$$

Los complejos que no se reducen a reales porque su segunda componente es $\neq 0$ se llaman *números imaginarios* (*).

Si la primera componente es nula, se llama imaginarios puros.

En la representación gráfica, los números reales $(a, 0)$ tienen sus afijos en el eje de las x, y los imaginarios puros $(0, b)$, en el eje de las y.

EJEMPLOS:

1. Son números reales los complejos:

$$(3, 0) = 3, \qquad (-\pi, 0) = -\pi, \qquad (2/3, 0) = 2/3, \qquad -\sqrt{3} = (-\sqrt{3}, 0)$$

2. Son imaginarios los complejos:

$$(1, 4), \qquad (3, -2), \qquad (1, 3)$$

3. Son imaginarios puros los complejos:

$$(0, 4), \qquad (0, -1), \qquad (0, 1/4), \qquad (0, -\sqrt{2}), \qquad (0, 5)$$

(*) Este nombre queda como residuo de la época en que estos números eran denominados también *sordos, ficticios, etc.*, y de los que aún el genial Euler dijo: «No son nada ni menos que nada, lo cual los hace imaginarios o imposibles». Tales ideas desaparecieron desde la época de Gauss, el *Princeps mathematicorum*, y hoy los números imaginarios tienen una existencia tan concreta como los enteros y los fraccionarios.

6. MODULO Y ARGUMENTO

Dado un punto P del plano, hemos visto que se le puede hacer corresponder un par de números reales en un cierto orden, que son las coordenadas del punto, cuando fijamos en el plano unos ejes coordenados.

Este punto P determina con el origen O un vector $\vec{OP}$, cuyas proyecciones sobre los ejes son las componentes del complejo (a, b).

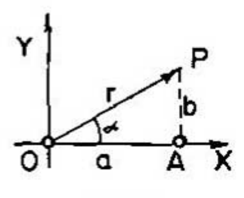


FIG. 2

Se puede fijar la posición del punto P del plano por el *módulo* de dicho vector y por su *argumento* respecto al semieje OX.

Designando por $|z| = r$ el módulo y por α el argumento, el complejo $z = (a, b)$ se escribe en *forma modular* así:

$$|z|_\alpha = r_\alpha = (a, b)$$

EJEMPLOS:

1. 8_3 quiere decir un número complejo cuyo módulo es 8 y cuyo argumento es 3 radianes, o sea, $3(57° 17' 45'') = 171° 53' 15''$ (**).

Dibuje el alumno su afijo.

2. 4_{25} representa un número complejo cuyo módulo es 4 y cuyo argumento es 25°.

El triángulo rectángulo PAO permite expresar las coordenadas a y b del punto P en función de las r y α:

$$a = r \cos \alpha, \qquad b = r \operatorname{sen} \alpha$$

y recíprocamente:

$$|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}, \qquad \alpha = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{b}{a}$$

Si al complejo z, le aumentamos su argumento en 2π radianes, obtenemos el mismo complejo, pues su afijo no ha variado. En general, resulta:

$$r_\alpha = r_{\alpha + 2k\pi} \qquad (k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

Por tanto:

Un complejo no varía cuando a su argumento se le suma o resta un número cualquiera de circunferencias.

Entre todos estos $\phi = \alpha + 2k\pi$ se llama *argumento principal* el que verifica la condición $-\pi < \phi < \pi$.

(**) Recuérdese que 1 radian = 57° 17' 45''.

Ejemplo:

Pasar a la forma modular los complejos (1, 1) y (1, − 1).

Para (1, 1) es $r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, $\alpha = arc\ tg\ 1/1 = arc\ tg\ 1$; α no queda bien determinado, pues, tanto el ángulo de 45° como el de 225° tienen 1 como tangente. Para saber que es 45° el ángulo que hay que tomar, basta representar gráficamente el complejo, o bien, observar que cuando $\alpha = arc\ sen\ 1/\sqrt{2}$ debe α valer 45° ó 135°. Por tanto $(1, 1) = (\sqrt{2})_{45^\circ}$.

Vamos a ver que en el cuerpo de los números complejos, al definir el *valor absoluto* o *módulo*, se verifican las siguientes propiedades:

$$1.^\circ)\quad |z| \geqslant 0 \quad y \quad |z| = 0 \quad implica \quad z = 0$$

$$2.^\circ)\quad |z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$$

$$3.^\circ)\quad |z + z'| \leqslant |z| + |z'|$$

Se dice, en general, cuando en un cuerpo se ha definido para cada elemento un número real, que verifica las propiedades anteriores, que se ha convertido en un *cuerpo valorado*.

En el caso del cuerpo C, la propiedad 1.° es inmediata. Para 2.°, tenemos: si

$$z = (a, b), \qquad z' = (a', b')$$

será:

$$|z \cdot z'| = |aa' - bb' + i(ab' + a'b)| = a^2a'^2 + b^2b'^2 + a^2b'^2 + a'^2b^2 =$$
$$= (a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2) = |z| \cdot |z'|$$

Para la propiedad 3.° basta considerar las siguientes transformaciones sencillas, de las que resulta la citada propiedad al escribirlas en sentido inverso:

$$\sqrt{(a + a')^2 + (b + b')^2} \leqslant \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a'^2 + b'^2}$$

elevando al cuadrado:

$$(a + a')^2 + (b + b')^2 \leqslant a^2 + b^2 + a'^2 + b'^2 + 2\sqrt{a^2 + b^2}\ \sqrt{a'^2 + b'^2}$$

o bien:

$$aa' + bb' \leqslant \sqrt{a^2 + b^2}\ \sqrt{a'^2 + b'^2}$$

y elevando al cuadrado y simplificando:

$$2aa'bb' \leqslant a^2b'^2 + b^2a'^2$$

o bien:

$$0 < (ab' - a'b)^2$$

7. FORMA TRIGONOMETRICA. PRODUCTO

Si en la forma binómica: $(a, b) = a + ib$ se sustituyen los valores de las componentes a y b en función del módulo r y el argumento α, se tiene:

$$a + bi = r \cos \alpha + ir \operatorname{sen} \alpha = r(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)$$

que es la forma *trigonométrica* del número complejo.

EJEMPLO:

La expresión binómica del complejo $(1, \sqrt{3})$ es $1 + i\sqrt{3}$.
Para hallar la expresión trigonométrica, calculemos el módulo y el argumento:

$$r = \sqrt{1 + 3} = 2, \quad \alpha = \operatorname{arc} \cos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}, \quad \text{luego } (1, \sqrt{3}) = 2 \cos \frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{3}$$

Si los complejos vienen dados en forma trigonométrica, la expresión del producto se obtiene análogamente multiplicando los factores como si fueran binomios reales, y resulta:

$$r(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha) r'(\cos \alpha' + i \operatorname{sen} \alpha') = r \cdot r'(\cos \alpha \cos \alpha' - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \alpha') +$$

$$+ irr'(\cos \alpha \operatorname{sen} \alpha' + \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha') = rr'[\cos (\alpha + \alpha') + i \operatorname{sen} (\alpha + \alpha')]$$

es decir:

$$r(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)\, r'(\cos \alpha' + i \operatorname{sen} \alpha') = rr'[\cos(\alpha + \alpha') + i \operatorname{sen}(\alpha + \alpha')]$$

Por consiguiente: *El módulo del producto es el producto de los módulos y el argumento es la suma de los argumentos de los factores.*

EJEMPLO:

$$6_{12^\circ}\, 3_{18^\circ} = 18_{30^\circ} = 18(\cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ) = 18\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2}\right) = 9\sqrt{3} + 9i$$

Sean P y P' los afijos de los dos factores del producto $r_\alpha r'_{\alpha'}$ y tratemos de construir gráficamente el afijo Q del producto $R_\beta = r_\alpha \cdot r'_{\alpha'}$.

Si construímos sobre OP un triángulo OPQ directamente semejante al $OP'A$ que determine el otro afijo P' con el punto unidad A del eje OX, tendremos:

$$\frac{OQ}{OP} = \frac{OP'}{1},$$

o bien:

$$\frac{R}{r} = \frac{r'}{1},$$

luego,

$$R = r \cdot r'.$$

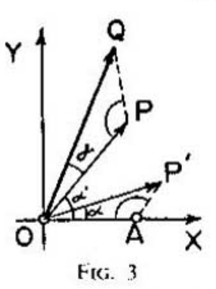


Fig. 3

También se verifica:

$$\beta = XOQ = \alpha + \alpha'$$

luego Q es el afijo del producto R_β y parece natural que digamos que el vector OQ es el *producto* de los vectores $\vec{OP}$ y $\vec{OP'}$.

8. DIVISION

Si es:

$$\frac{r_\alpha}{r'_{\alpha'}} = R_\beta \qquad \text{debe ser} \qquad r_\alpha = R_\beta \cdot r'_{\alpha'}$$

luego, por las propiedades del producto, será:

$$r = R \cdot r', \qquad \text{de donde} \qquad R = \frac{r}{r'}$$

$$\alpha = \beta + \alpha', \qquad \text{de donde} \qquad \beta = \alpha - \alpha',$$

es decir:

$$\frac{r_\alpha}{r'_{\alpha'}} = \left| \frac{r}{r'} \right|_{\alpha - \alpha'}.$$

Por tanto: *El cociente de dos números complejos tiene como módulo el cociente de los módulos y como argumento la diferencia de los argumentos.*

Ejemplo:

$$6_{70^\circ} : 2_{30^\circ} = (6 : 2)_{70^\circ - 30^\circ} = 3_{40^\circ} \,;\, 4_{120^\circ} : 5_{150^\circ} = (4 : 5)_{120^\circ - 150^\circ} = (4/5)_{-30^\circ}$$

INTERPRETACION GEOMETRICA. COCIENTE DE VECTORES. Siendo la división operación inversa de la multiplicación, la construcción gráfica del cociente de los complejos cuyos afijos son Q y P consistirá en dibujar un triángulo OAP' directamente semejante al OPQ y en el caso que sea $OA = 1$. El vector obtenido $\vec{OP'}$ diremos que es el cociente de los vectores $\vec{OQ} : \vec{OP}$.

9. POTENCIAS

I. FORMULA DE MOIVRE. Como consecuencia de la definición de producto resulta para la potencia n-sima de exponente natural de un número complejo:

$$[r(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)]^n = [r(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)]\,[r(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)]\ldots^n[r(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)] = r^n(\cos n\alpha + i\,\text{sen}\,n\alpha)$$

Esta fórmula expresa que *la potencia* n-*sima de un número complejo es otro número complejo cuyo módulo es la potencia* n-*sima del módulo y cuyo argumento es n veces el argumento del complejo dado.*

EJEMPLOS:

$$(1 + i\sqrt{3})^6 = \left[2\left(\cos\frac{n}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{n}{3}\right)\right]^6 = 2^6(\cos 2\pi + i\,\text{sen}\,2\pi) = 64$$

10. RAICES

Definición. Se llama *raíz* n-*sima* de un número complejo r_α a otro número complejo R_β cuya potencia n-*sima* es igual a r_α. Es decir:

$$(R_\beta)^n = r_\alpha, \qquad \text{o sea} \qquad (R^n)_{n\beta} = r_\alpha$$

luego, habrá de ser:

$$R^n = r \ \text{ y } \ n\beta = \alpha + 2k\pi \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2\ldots)$$

De aquí deducimos:

$$R = \sqrt[n]{r}, \qquad \beta = \frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\ (*) \qquad [4]$$

Dando a k los valores 0, 1, 2, ..., $n - 1$ obtenemos los n argumentos:

$$\frac{\alpha}{n},\ \frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n},\ \frac{\alpha}{n} + \frac{2\cdot 2\pi}{n},\ \ldots,\ \frac{\alpha}{n} + \frac{(n-1)\cdot 2\pi}{n}$$

Si damos el valor $k = n$, resulta:

$$\frac{\alpha}{n} + \frac{n\cdot 2\pi}{n} = \frac{\alpha}{n} + 2\pi,$$

(*) Si β estuviese expresado en grados, sería:

$$\alpha = \frac{\beta}{n} + \frac{360\,k}{n}$$

es decir, el primer argumento α/n incrementado en una circunferencia; luego, el nuevo número complejo coincidirá con el primero, y así sucesivamente. Obsérvese que todas las raíces tienen el mismo módulo, luego sus afijos están situados sobre una circunferencia de centro el origen y radio $R = \sqrt[n]{r}$. La primera tiene como argumento α/n; la segunda $\alpha/n + 2\pi/n$, es decir, el de la raíz anterior más la *n-sima* parte de la circunferencia, etc. Es decir, hallada la primera, las restantes se obtienen dividiendo la circunferencia en n partes iguales a partir de este punto y son los vértices de un polígono regular inscrito de n lados.

Resulta, pues:

Todo número complejo tiene n raíces n-simas distintas, cuyos afijos son los vértices de un polígono regular de n lados inscrito en una circunferencia de centro en O.

Las raíces *n-simas* de r_α se expresan fácilmente en forma trigonométrica a partir de las expresiones [4], obteniéndose:

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right]$$

$$k = 0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ n-1$$

EJEMPLO:

Hallar las raices sextas de $64i$.

Evidentemente, el módulo de todas las raices será $\sqrt[6]{64} = 2$, y, por consiguiente, estarán en la circunferencia de radio 2. Como el argumento de $64i$ es $\pi/2$, los argumentos de las raíces serán:

$$\frac{\pi}{12},\ \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{6},\ \frac{\pi}{12} + \frac{4\pi}{6},\ \frac{\pi}{12} + \frac{6\pi}{6},\ \frac{\pi}{12} + \frac{8\pi}{6},\ \frac{\pi}{12} + \frac{10\pi}{6}$$

Representan los vértices del exágono inscrito en la circunferencia de radio 2 y cuyo primer vértice tiene el argumento $\frac{\pi}{12}$.

Su expresión general es:

$$\sqrt[6]{64i} = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{6}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{6}\right)\right]$$

$$k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

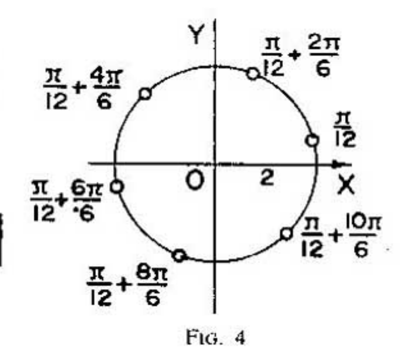


FIG. 4

Como resultado final de la teoría, veamos la resolución del problema de las raíces cuadradas de los números negativos.

Un número negativo $-a$ es un complejo de módulo a y argumento π. En virtud del párrafo anterior, sus raíces cuadradas son:

$$\sqrt{-a} = \begin{cases} \sqrt{a}\left(\cos \dfrac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{2}\right) = \sqrt{a} \cdot i \\ \sqrt{a}\left(\cos \dfrac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen} \dfrac{3\pi}{2}\right) = -\sqrt{a}\, i \end{cases}$$

Luego: *Todo número real negativo tiene dos raíces cuadradas, que son números imaginarios puros conjugados.*

11. POTENCIAS Y LOGARITMOS DE NUMEROS COMPLEJOS

a) Por consideraciones que sería prolijo explicar, aquí, se ha llegado a establecer como definición de *potencia de base* e *y exponente imaginario*:

$$e^{m + i\alpha} = e^{m}(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha) \qquad [1]$$

Veamos que esta definición verifica la regla fundamental del cálculo de potencias. Si es:

$$e^{n + i\beta} = e^{n}(\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta)$$

vamos a demostrar que:

$$e^{m + i\alpha} \cdot e^{n + i\beta} = e^{m + n + i(\alpha + \beta)} \qquad [2]$$

Se tiene:

$$e^{m + i\alpha} \cdot e^{n + i\beta} = e^{m}(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)\, e^{n}(\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta) =$$

$$= e^{m + n}[\cos(\alpha + \beta) + i \operatorname{sen}(\alpha + \beta)] = e^{m + n + i(\alpha + \beta)}$$

b) Como consecuencia de [1] resulta la notable fórmula:

$$e^{2k\pi i} = 1 \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \qquad [3]$$

c) Diremos que $z = x + iy$ es el *logaritmo neperiano* del número complejo:

$$\zeta = r(\cos \phi + i \operatorname{sen} \phi)$$

si se verifica:

$$e^{z} = \zeta, \qquad \text{o sea:} \qquad e^{x + iy} = r(\cos \phi + i \operatorname{sen} \phi)$$

es decir,

$$e^{x}(\cos y + i \operatorname{sen} y) = r(\cos \phi + i \operatorname{sen} \phi)$$

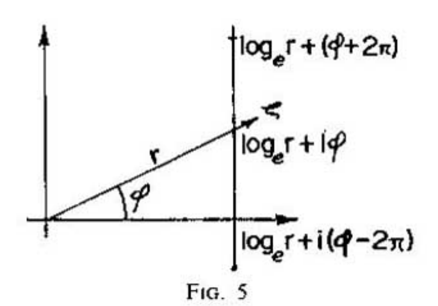


FIG. 5

Esta igualdad implica:

$$e^x = r; \qquad y = \phi + 2k\pi$$

o sea,

$$x = \log_e r; \qquad y = \phi + 2k\pi$$

luego, todo número complejo ζ tiene infinitos logaritmos neperianos, todos tienen la misma parte real $\log_e r$, y las partes imaginarias difieren entre sí en múltiplos de 2π. Gráficamente, vienen representados por puntos situados sobre una paralela al eje y.

El valor correspondiente a $k = 0$ se suele llamar *valor principal* y se designa por $\log \zeta$ y el *valor general* se designa por $\log ((\zeta))$.

EJEMPLOS:

$$\log ((i)) = \log |i| + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$$

$$\log ((1 + i)) = \log |1 + i| + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) = \log 2 + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)$$

EJERCICIOS

1. Calcular:

$$\frac{1}{i}, \frac{1}{i^3}, \frac{1}{i^4}, \frac{5}{3 - 4i}, \left(\frac{2 - i}{3 - i}\right)^2$$

2. Calcular el módulo y el argumento de los siguientes complejos:

$$- i, \quad - 8, \quad \frac{3}{i}, \quad - 1 + 2i, \quad \cos a + i \operatorname{sen} a$$

3. Calcular el módulo del producto:

$$- 2i(1 + i)(3 + i)$$

4. Idem. el módulo de:

$$\frac{(3 + 2i) \cdot (1 - i)}{(4 + i) \cdot (2 - i)}$$

5. Un triángulo equilátero tiene su centro en el origen de coordenadas y un vértice es el punto (1, 0). Determinar los complejos que representan los otros dos vértices.

6. El mismo problema para un cuadrado.

7. Calcular: $\sqrt{i}$.

Sol.: $\sqrt{i} = \pm (1 + i) : \sqrt{2}$.

8. Calcular: $\sqrt[3]{1 + i}$; $\sqrt[4]{-16}$.

9. Calcular: $[2(\cos 3^\circ + i \operatorname{sen} 3^\circ)]^5$ y poner el resultado en forma binómica.

10. Resolver los tres últimos ejercicios gráficamente.

11. Efectuar los productos siguientes:

$$3(\cos 6^\circ + i \operatorname{sen} 6^\circ) \times 2(\cos 20^\circ + i \operatorname{sen} 20^\circ)$$
$$2(\cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ) \times 5(\cos 60^\circ + i \operatorname{sen} 60^\circ)$$
$$12(\cos 45^\circ + i \operatorname{sen} 45^\circ) \times 1(\cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ)$$
$$2(\cos 120^\circ + i \operatorname{sen} 120^\circ) \times 7(\cos 45^\circ + i \operatorname{sen} 45^\circ)$$

CAPITULO **5**

Introducción de conceptos topológicos

1. ENTORNOS EN LA RECTA

Vamos a introducir una serie de conceptos básicos para el Análisis matemático, cuyo origen intuitivo es la noción de proximidad. Empezaremos por considerar estos conceptos en el conjunto de los números reales R, después en el espacio bidimensional y en el n-dimensional. Ellos son la base para precisar los conceptos de entorno, límite, convergencia, continuidad, etc.

Los números reales x *que cumplen la condición* $a \leqslant x \leqslant b$, *se dice que forman un intervalo cerrado, que se designa por* $[a, b]$.

El conjunto de los números reales x *tales que* $a < x < b$, *se llama intervalo abierto y lo designaremos por* (a, b).

En ambos casos, los números a, b se llaman *extremos* del intervalo y la diferencia $d = b - a$ es la *amplitud* del intervalo.

Si representamos los números reales por puntos de una recta, un intervalo es el conjunto de los puntos de un segmento, incluidos los extremos si es cerrado y excluidos si es abierto.

También llamaremos *intervalos* a los conjuntos de números x siguientes: $x > a$, que convendremos en designar por la notación (a, ∞); $x < a$, que se designa por $(-\infty, a)$; el conjunto de todos los números reales, lo designaremos con la notación $(-\infty, +\infty)$. Los símbolos $+\infty$ y $-\infty$ *no deben considerarse como números*, sino simplemente como signos útiles para abreviar y uniformar las notaciones.

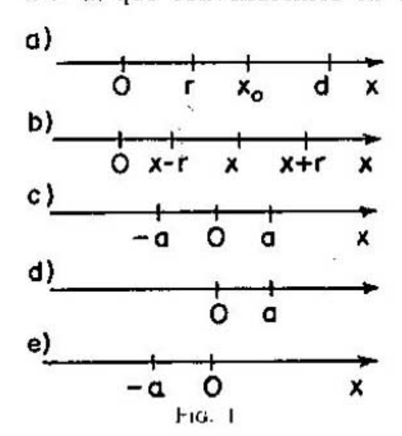


FIG. 1

Llamaremos *entorno simétrico* del punto x y radio r al conjunto $E(x, r)$ de los puntos y cuya distancia a x es $< r$, es decir, al conjunto:

$$E(x, r) = \{ y \in R : |x - y| < r \}$$

Análogamente el *entorno simétrico cerrado* de x de radio r es el conjunto:

$$E(x, r) = \{ y \in R : |x - y| \leqslant r \}$$

2. CONJUNTOS ABIERTOS

Un conjunto G de R se llama *abierto*, si para cada punto $x \in G$ existe un entorno simétrico de centro x y r conveniente, tal que todos sus puntos pertenecen a G.

EJEMPLO:

El conjunto $a < x < b$ es abierto; pero no el $a \leq x < b$ ni el $a \leq x \leq b$.

Teorema 1) *El conjunto total* R *y el conjunto vacío* ϕ *son abiertos.* 2) *La intersección de* n *conjuntos abiertos es un abierto.* 3) *La unión de cualquier colección de conjuntos abiertos es un abierto.*

La propiedad 1) es inmediata. Para demostrar la propiedad 2) para dos conjuntos abiertos G_1 y G_2 debemos probar que $G = G_1 \cap G_2$ es abierto. Sea $x \in G$, por ser $x \in G_1$ hay un entorno simétrico $E[x, r_1] \in G_2$. Por ser $x \in G_2$ hay un $E(x, r_2) \in G_2$. El entorno menor de estos dos es tal que sus puntos pertenecen a G_1 y a G_2, luego a G, y, por tanto, G es abierto. La generalización a n conjuntos es inmediata, bien directamente o por inducción. Para infinitos conjuntos la propiedad puede no ser cierta, como prueba el ejemplo siguiente de conjuntos de R.

$$G_n = \left\{ x \,\middle|\, -1 - \frac{1}{n} < x < 1 + \frac{1}{n} \right\} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

cuya intersección es el intervalo cerrado $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

Para demostrar 3) observemos que si es $\{ G_\alpha, G_\beta, \ldots \}$ una colección de conjuntos abiertos y G su unión y $x \in G$ también será $x \in G_r$ para algún conjunto de la colección. Por tanto, habrá algún entorno de x, cuyos puntos pertenecerán a G_r y, por tanto, a G, luego G es abierto.

3. CONJUNTOS CERRADOS

Un conjunto F es *cerrado* si su complementario $G = R - F$ es abierto.

EJEMPLO:

El subconjunto de R : $a \leq x \leq b$ es cerrado, pues su complementario es la unión de dos abiertos: $x < a$ y $x > b$, luego es abierto.

Se observa que *un conjunto puede no ser ni abierto ni cerrado*, como, por ejemplo: el intervalo $0 \leqslant x < 1$.

Por otra parte, *un conjunto puede ser a la vez abierto y cerrado*, como veremos a continuación para los conjuntos ϕ y R.

Teorema. a) *El conjunto total R y el conjunto vacío son cerrados.* b) *La unión de dos o n conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.* c) *La intersección de cualquier colección de cerrados es un cerrado.*

La demostración se hace fácilmente pasando a los complementarios y aplicando el teorema de los conjuntos abiertos.

4. ENTORNOS. PUNTOS DE ACUMULACION Y ADHERENTES

Llamamos *entorno* de un punto $x \in R$ cualquier conjunto que contiene un conjunto abierto, que contiene a x.

Dado un conjunto A, decimos que el punto x es interior a A, si A es un entorno de x, es decir, si existe un entorno simétrico $E(x, r)$ contenido en A.

Se dice que x es un *punto de acumulación* de A si en todo entorno de x existe un punto de A, distinto de x. Si se prescinde de esta última condición el punto se llama *adherente*.

Todo conjunto A que tiene un punto de acumulación x es necesariamente infinito.

Consideremos un primer entorno de x a saber $(x - \varepsilon_1, x + \varepsilon_1)$.

Existe un punto x_1 interior a él y tal que $x_1 \in A$. Sea:

$$0 < \varepsilon_2 < |x - x_1|$$

En el entorno $(x - \varepsilon_2, x + \varepsilon_3)$ existe $x_2 \in A$, etc. Se ve que así se forma una sucesión de intervalos encajados que define (Lec. 2, § 11) un punto de $[a, b]$.

Vemos así, además, que *todo punto x de acumulación es tal que en todo entorno suyo hay infinitos del conjunto.*

EJEMPLOS:

1. La sucesión $a_n = (-1) + \dfrac{1}{n}$ tiene como puntos de acumulación $+1$ y -1.

2. El conjunto de los números racionales del intervalo $(0, 1)$ tiene como puntos de acumulación todos los números reales del mismo.

Es interesante observar que si consideramos la sucesión $x_{2n} = 1$, $x_{2n+1} = \dfrac{1}{n}$, el 0 es punto de acumulación y el 1 no lo es.

Todo punto de acumulación es adherente.

5. CONJUNTO DERIVADO. ADHERENCIA

Si un punto x de A es tal que hay un entorno suyo que no contiene más punto de A que x, este punto se llama *aislado*. Tal punto es un punto adherente, pero no de acumulación.

El conjunto de los puntos de acumulación de A se llama su *conjunto derivado* y se designa por A' y el conjunto de los puntos adherentes de A se llama su *adherencia* y se designa por $\overline{A}$.

Se ve así que todo punto x de A, o bien es tal que en todo entorno suyo hay un punto A distinto del x, o bien hay un entorno que no tiene esta propiedad y se trata de un punto aislado adherente. Es decir, $\overline{A} = A \cup A'$.

Para que un conjunto infinito A sea cerrado es necesario y suficiente que $A \supset A'$.

Sea x un punto de acumulación del conjunto cerrado A. Si x no perteneciera a A, pertenecería al complementario CA, y este sería un conjunto abierto que contendría a x, y, por consiguiente, a un entorno de x. Pero por ser x punto de acumulación de A, este entorno contiene puntos de A, y estos puntos deberían pertenecer también a CA, lo que es contradictorio; luego $x \in A$.

El recíproco se demuestra fácilmente.

6. TEOREMA DE BOLZANO-WEIERSTRASS

Todo conjunto S infinito acotado de R, posee un punto de acumulación.

Por ser S acotado estará contenido en un intervalo $[a, b]$. Sea a_1 el punto medio de (a, b). Uno al menos de los intervalos $[a, a_1]$, $[a_1, b]$ tiene infinitos puntos de S. Se toma un intervalo, por ejemplo $[a, a_1]$ que contenga infinitos puntos de S. Se parte nuevamente en dos por su punto medio. Se obtiene así una sucesión de intervalos encajados que define (Lec. 2, § 11). Un punto de $[a, b]$. Este punto es de acumulación de S, ya que en todo entorno suyo hay segmentos del encaje y, por tanto, infinitos puntos de $[a, b]$.

7. ESPACIOS CARTESIANOS N-DIMENSIONALES

Los conceptos básicos, que hemos introducido para conjuntos de R, se generalizan fácilmente a los espacios cartesianos n-dimensionales.

Hemos considerado ya la recta real que designaremos por R y definiremos el *espacio euclidiano real n-dimensional* como el producto cartesiano: $R^n = R \times R \times \ldots \times R$, es decir, los elementos o puntos de este espacio son los complejos $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de n componentes reales, en que se define el *valor absoluto* o *norma euclidiana* de X por $|X| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$ y la *distancia* entre X e Y por $d(X, Y) = |X - Y| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$.

Las propiedades algebraicas de estos espacios (suma, producto por una constante, etc.), ya fueron estudiadas (*).

(*) Ver S. Ríos, *Algebra lineal*, Madrid, 1966.

8. CONJUNTOS ABIERTOS

Sea $X \in R^n$ y $r > 0$ un número real. Llamaremos 1.º *bola abierta* de centro X y radio r el conjunto $B(X, r)$ de los puntos Y cuya distancia a X es $< r$, es decir, el conjunto $\{ Y \in R^n \mid |X - Y| < r \} = B(X, r)$. 2.º la *bola cerrada* se define como el conjunto $\{ Y \in R^n \mid |X - Y| \leqslant r \}$ y 3.º la *esfera*: $\{ Y \in R^n \mid |Y - X| = r \}$.

En el caso de R tenemos como especialización de estos conceptos el *entorno simétrico* de centro X y radio r, 2.º el *entorno simétrico cerrado* y 3.º los *extremos* del entorno.

En el plano R^2 estos tres conceptos coinciden con *disco* o *círculo* excluida la circunferencia, *círculo* incluida la circunferencia y *circunferencia*, respectivamente.

Un conjunto G de R^n se llama *abierto* si para cada punto $X \in G$ existe una bola abierta de centro X y radio r conveniente, tal que todos los puntos de dicha bola pertenecen a G.

EJEMPLOS:

1) El conjunto de R^2 definido por $x_1 > 0$; $x_2 > 0$ es abierto; pero no el definido por $x_1 \geq 0$, $x_2 > 0$.

2) El conjunto de los puntos Y de R^n definido por $|X - Y| < r$ es abierto; pero no el $|X - Y| \leq r$.

Como generalización de los intervalos abiertos y cerrados de R, tenemos: *cubo abierto (cerrado)* en R^n es el producto cartesiano de n intervalos abiertos (cerrados) de R.

Teorema 1) *El conjunto total R^n y el conjunto vacío ϕ son abiertos.* 2) *la intersección de n conjuntos abiertos es un abierto.* 3) *la unión de cualquier colección de conjuntos abiertos es un abierto.*

Este teorema y todos los teoremas y definiciones dados para conjuntos de R se generalizan inmediatamente, como puede comprobar el lector mediante útiles ejercicios. He aquí algunas indicaciones: en el teorema de los conjuntos abiertos basta para pasar a la demostración en R^n, sustituir los entornos simétricos por bolas abiertas y la demostración se obtiene mutatis mutandis.

El teorema de los conjuntos cerrados, como se obtiene pasando a los complementarios, no requiere ninguna modificación especial.

En el teorema de Bolzano, el conjunto acotado de R estará contenido en un hipercubo de arista L. Entonces este cubo se divide en cada paso en 2^n cubos por bisección de sus aristas, y uno de estos cubos, que contenga infinitos puntos del conjunto, se divide nuevamente en 2^n, etc. La demostración se completa igual que en el caso uni-dimensional.

9. TEOREMAS DE RECUBRIMIENTO Y COMPACIDAD

La propiedad de los intervalos encajados y el teorema de Bolzano-Weierstrass están íntimamente relacionados con la propiedad de compacidad que vamos a estudiar.

Un conjunto K en R^n se llama *compacto* si siempre que está contenido en la unión de una familia A de conjuntos abiertos, está contenido en la unión de un número finito de conjuntos de A. Se dice en tal caso que la familia A es un recubrimiento de K y que K está recubierto por la familia A.

La condición de compacidad implica que todo recubrimiento se puede sustituir por un recubrimiento finito.

TEOREMA DE HEINE-BOREL. *Sea F un conjunto cerrado y acotado de R. Este conjunto es compacto, es decir, si una familia A de conjuntos abiertos recubre F existe un número finito de estos conjuntos que recubren F.*

Vamos a empezar por el caso de la recta R y vamos a suponer que los conjuntos abiertos de R son intervalos abiertos, ya que si demostramos este caso, el general es inmediato.

Supongamos que F tiene infinitos puntos, pues si no el teorema es trivial. Supongamos que la propiedad sea falsa, es decir, que no exista un conjunto finito de intervalos de A que recubran F. Entonces si dividimos F en dos partes F', F'' una al menos de éstas no puede ser recubierta por un número finito de intervalos de A, pues si cada una pudiera ser recubierta por un número finito de intervalos, también podría serlo la unión $F' \cup F'' = F$, contra lo supuesto.

Como hemos supuesto que F es acotado, estará contenido en un intervalo cerrado $I_1 = [a, b]$. Supongamos dividido este intervalo en dos mitades $I'_1 = [a, b_1]$, $I''_1 = [b_1, b]$, de modo que $F' = F \cap I'_1$, $F'' = F \cap I''_1$. Uno al menos de estos dos F', F'', que son cerrados, no podrá ser recubierto por un número finito de intervalos. Designémoslo por F_1. Prosiguiendo obtenemos $F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \dots \supset F_n \supset \dots$, en que $F_n \supset I_n = [a_n, b_n]$, siendo:

$$b_n - a_n = \frac{b - a}{2^n}$$

Resulta así que hay un punto x contenido en todos los F_n. Como se ha supuesto que F_n no puede ser recubierto por un número finito de intervalos abiertos de A; resulta que x es punto de acumulación de F, ya que x está contenido en los intervalos $[a_n, b_n]$. Como F es cerrado, $x \in F$. Como por hipótesis, todo punto de F está contenido en un intervalo abierto de la familia A, tendremos un intervalo:

$$(x - \delta, x + \delta) \subset C \in A$$

Pero para n suficientemente grande el intervalo I_n estará contenido en éste, es decir:

$$I_n \subset (x - \delta, x + \delta)$$

luego $F \cap I_n$ está contenido en $(x - \delta, x + \delta)$, y, por consiguiente, estará contenido en el abierto C de la familia A. Resulta, pues, una contradicción, ya que F estaría recubierto por un solo C de la familia A.

Hemos demostrado que *si F es acotado y cerrado es compacto.* Se demuestra también que *si F es compacto es acotado y cerrado.*

Es inmediato ver que si F no es acotado no es compacto. Basta considerar el conjunto $[a, +\infty]$ y recubrir x por el intervalo $(x - \xi, x + \xi)$ con ξ fijo.

La demostración del teorema en R^n se generaliza fácilmente. Puesto que F es acotado puede ser contenido en un hipercubo I_1, de R^n. Si F no está contenido en la unión de un número finito de conjuntos abiertos de A, uno I_2 al menos de los subconjuntos de F, intersección de F con cada una de las 2^n partes en que dividiremos I_1 por bisección de sus aristas, no podrá ser recubierto por un número finito de conjuntos de A.

Prosiguiendo nuevas subdivisiones de $I_2, I_3, \ldots$, ya la demostración resulta mutatis mutandis del caso unidimensional.

10. ESPACIOS METRICOS Y TOPOLOGICOS

La distancia euclidiana $d(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$ que utilizamos en R^n verifica las siguientes propiedades de fácil comprobación:

1.° $d(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \geqslant 0$, $d(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = 0$ equivale a $\mathbf{X} = \mathbf{Y}$.

2.° $d(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = d(\mathbf{Y}, \mathbf{X})$ *(propiedad de simetría).*

3.° $d(\mathbf{X}, \mathbf{Z}) \leqslant d(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) + d(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})$ *(propiedad triangular).*

Diremos que un conjunto E es un *espacio métrico o distanciado* si a cada par de puntos $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ se hace corresponder un número real $d(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ que verifica las 3 propiedades anteriores.

EJEMPLO:

De distancias, además, de la euclidiana considerada son:

1.° En R : $d(x, y) = |x - y|$.

2.° En R^n : $d(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \sum_{i=1}^{n} |x_k - y_k|$.

3.° En R^n : $d(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \sup_k |x_k - y_k|$.

La definición de bola es la base para la introducción de los conceptos de conjunto abierto, cerrado, etc. Resulta así fácilmente generalizados a los espacios métricos generales de una parte importante de la teoría expuesta para R^n con la distancia euclidiana. El lector puede hacerlo como ejercicio.

Como ejemplo vamos a demostrar una propiedad relativa a la estructura de un conjunto abierto de un espacio métrico.

Sea E un espacio métrico. Un subconjunto G de E es abierto si y sólo si es la unión de una familia de bolas abiertas.

Si G es abierto, puede ser vacío o no. En el primer caso es la unión de una clase vacía de bolas abiertas. Si G es no vacío, cada uno de sus puntos es centro de una bola abierta contenida en G y G es la unión de todas estas bolas abiertas.

Recíprocamente, supongamos que G es la unión de una clase A de bolas abiertas. Si A es vacía, G es vacío y, por tanto, abierto. Si A no es vacía, y es x un punto de G, pertenecerá a una bola abierta $E(x_0)$ de la familia A. Por ser $E(x_0)$ un conjunto abierto, x es el centro de una bola abierta $E(x_1) \subset E(x_0) \subset G$. Es decir, que todo punto x de G es centro de una bola abierta contenida en G, luego G es abierto.

Este teorema es evidentemente válido para conjuntos abiertos de R^n. En el caso de R se puede precisar más. Se puede demostrar que *cada conjunto no vacío de R es la unión de una familia numerable de intervalos abiertos disjuntos.*

Un paso más en la generalización nos conduce a fijarnos en el teorema fundamental de los conjuntos abiertos, cuya validez se demuestra muy fácilmente en los espacios métricos: *si es E un espacio métrico se verifica* 1.°) *la intersección de n abiertos es un abierto,* 2.°) *la unión de cualquier colección de conjuntos abiertos es un abierto.*

El concepto de *espacio topológico* se inspira en el teorema anterior y se introduce así: Sea E un conjunto no vacío. Una clase T de subconjuntos de E llamados *conjuntos abiertos*, se llama una *topología* sobre E si: 1.°) la intersección de n conjuntos de T es un conjunto de T, 2.°) la unión de cualquier colección de conjuntos de T es un conjunto de T.

Ejemplos de estos espacios son los espacios métricos ya considerados y también:

1.°) Sea E un conjunto cualquiera no vacío y T la clase de todos los subconjuntos de E. Esta se llama la *topología discreta* sobre E.

2.°) Sea E un conjunto infinito y T formada por el conjunto vacío ϕ y todos los subconjuntos no vacíos de E cuyos complementarios son finitos.

11. ANALOGIAS Y DIFERENCIAS ENTRE EL PLANO REAL Y EL PLANO COMPLEJO

El plano euclídeo R^2 es un caso particular de R^n, en que la distancia entre dos puntos $\mathbf{X} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{Y} = (y_1, y_2)$, se define:

$$d(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

Al considerar los pares de números reales como elementos de R^2 hemos operado con ellos como en un espacio vectorial.

En cambio, al considerar los pares de números reales como números complejos, es decir, como elementos de C hemos definido además el producto y consideramos C como un cuerpo. Esto no es posible hacerlo con R para $n > 2$.

Las propiedades de ordenación del cuerpo de los números reales no son válidas en este cuerpo C, como ya vimos.

\Si se define la distancia mediante el módulo o norma, se obtiene la misma expresión que en el caso de R^2, es decir:

$$d(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

Por consiguiente, todas las propiedades topológicas vistas para R^2 como caso particular de R^n, basadas en la definición de entorno, son válidas para C.

EJEMPLOS:

1. Determinar los puntos de acumulación de los siguientes conjuntos de R y decir, si son abiertos, cerrados o ninguna de las dos cosas:

a) Los números $1/n$.

b) Los números racionales.

c) El intervalo $0 < x \leq 2$.

d) Los números de la forma: $\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n}$.

2. Probar que todo conjunto abierto en R es la intersección de una colección numerable de conjuntos abiertos.

3. Sea E un conjunto de elementos $\mathbf{X}$. Definimos para cada elemento $\mathbf{X}$ un número real llamado *norma* $\nu(\mathbf{X})$, con las propiedades:

a) $\nu(\mathbf{X}) = 0$ equivale a $\mathbf{X} = 0$.

b) $\nu(\mathbf{X} + \mathbf{Y}) \leq \nu(\mathbf{X}) + \nu(\mathbf{Y})$.

c) $\nu(\alpha\mathbf{X}) = |\alpha| \, \nu(\mathbf{X})(\alpha =$ número real).

Tenemos así lo que se llama un *espacio normado*.

Si ponemos $d(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \nu(\mathbf{X} - \mathbf{Y})$ demostrar que el espacio se ha convertido en un espacio métrico.

4. Si en un espacio métrico E la distancia verifica las condiciones:

a) $d(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = d(\mathbf{X} + \mathbf{Z}, \mathbf{Y} + \mathbf{Z})$ para $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{Z}$ cualesquiera.

b) $d(a\mathbf{X}, a\mathbf{Y}) = |a| \, d(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ tal espacio es un espacio normado en que:

$$\nu(\mathbf{X}) = d(0, \mathbf{X})$$

5. Un conjunto E de R se llama *convexo* si para todo $\mathbf{X} \in E$ e $\mathbf{Y} \in E$ y todo θ tal que $0 \leq \theta \leq 1$, se verifica $\theta\mathbf{X} + (1 - \theta)\,\mathbf{Y} \in E$. Demostrar que las bolas abiertas o cerradas de R^n son convexas.

6. Demostrar que el derivado de un conjunto es cerrado.

7. Demostrar que la adherencia de un conjunto es un conjunto cerrado.

8. Demostrar que el conjunto de los números racionales del intervalo [0, 1] no puede expresarse como intersección de una colección numerable de conjuntos abiertos.

9. Elaborar con detalle las demostraciones en R^n sólo indicadas en líneas generales en el texto.

CAPITULO **6**

Sucesiones. Límites

1. DEFINICIONES

Una *sucesión* en R es una aplicación cuyo dominio es el conjunto de los números naturales y cuya imagen es un conjunto de R. Es decir, una sucesión se define asignando a cada número natural n un número real que denotaremos $x(n)$, o bien x_n.

Diremos que $\{ x_n \}$ es *convergente* y que $x \in R$ es *límite* de x_n, si fijado un entorno $E(x, \varepsilon)$, de x, existe un $n(\varepsilon)$, tal que para $n > n(\varepsilon)$, los $x_n \in E(x, \varepsilon)$. Es decir, fijado el entorno $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$, para $n > n(\varepsilon)$ es $x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon$, o bien $| x_n - x | < \varepsilon$.

Se escribe $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$ y también $\underset{n \to \infty}{x_n} \to x$.

Una *sucesión que no es convergente se dice divergente*. A veces se distingue entre sucesiones *divergentes hacia infinito* y *oscilantes*.

La sucesión y_n *se dice divergentes hacia* $+ \infty$ *si dado un número* K *arbitrariamente grande*, existe un $n(K)$ tal que, para $n > n(K)$, es $y_n > K$.

Se representa así:

$$\lim_{n \to \infty} y_n = + \infty$$

Análogamente se define:

$$\lim_{n \to \infty} y_n = - \infty$$

No se olvide que el símbolo $\pm \infty$ *no es un número*, sino un signo que sirve para expresar cómodamente el contenido de la definición anterior.

Una sucesión que no es convergente ni divergente hacia $+ \infty$ o $- \infty$ se llama *oscilante*.

EJEMPLOS:

Las sucesiones:

$$2, \quad 4, \quad 6, \quad 8, \ldots$$
$$-2, \quad -4, \quad -6, \quad -8, \ldots$$

son divergentes hacia $+\infty$ y $-\infty$, respectivamente.

La sucesión:

$$1, \quad -1, \quad 1, \quad -1, \ldots$$

es oscilante.

2. OPERACION DE PASO AL LIMITE

Establecido el concepto de límite de una sucesión de números reales, podemos decir que el cálculo del límite de una sucesión es una *operación* análoga a las elementales de suma, producto, etc., consideradas en Aritmética y Algebra, pero más complicada. Los datos ahora son infinitos y, en general, hay que considerar dos partes en la operación:

1.° Demostración de la existencia del límite.

2.° Cálculo de dicho límite.

El segundo problema es más difícil que el primero y, en muchos, casos, cabe únicamente calcular con una cierta aproximación decimal el número real límite de la sucesión dada.

Demostraremos únicamente los dos siguientes teoremas fundamentales que permiten, en algunos casos, resolver dichos problemas.

I. TEOREMA DE UNICIDAD. *Si una sucesión tiene límite, éste es único.*

Pues si y_n tuviera dos límites distintos, b, b', desde un valor de n en adelante, los puntos y_n deben estar en un segmento de centro b y amplitud 2ε y en un segmento de centro b' y amplitud 2ε, y tomando ε suficientemente pequeño, para que dichos segmentos no tengan puntos comunes, aquello es imposible.



FIG. 1

Este teorema puede enunciarse en otra forma equivalente:

Si dos sucesiones y_n, y'_n son tales que toman valores iguales para $n > n_0$, y una de ellas tiene límite, la otra tiene este mismo límite.

Esta propiedad, de apariencia trivial, por ser una consecuencia de la definición de límite, permite hacer transformaciones en las expresiones cuyo límite tratamos de hallar, simplificándolas.

EJEMPLOS:

1. $$\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n^2-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

2. $$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{1+2+\ldots+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0$$

II. LIMITE DE SUCESIONES MONOTONAS. *Una sucesión $\{x_n\}$ monótona creciente tiene límite finito, según que sea mayorada o no.*

(Análogamente para sucesiones decrecientes.)

Supongamos que la sucesión monótona creciente $\{x_n\}$ no sea mayorada. Esto quiere decir que, dado un número cualquiera M, siempre se puede determinar un índice n_0 tal que:

$$x_{n_0} > M$$

pero por la monotonía, todos los $x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, \ldots$, tienen la misma propiedad, es decir, el límite de la sucesión es $+\infty$.

Supongamos ahora que $\{x_n\}$ sea mayorada. Existe un número K tal que:

$$x_n \leqslant K, \quad \text{luego} \quad x_1 \leqslant x_n \leqslant K$$

es decir, en el intervalo (x_1, K) están contenidos todos los números de la sucesión. Dividámoslo en dos iguales; si en ambos hay números, llamaremos $\mathscr{F}_1$ al intervalo de la derecha; si no hay puntos en el de la derecha, llamaremos $\mathscr{F}_1$ al de la izquierda. Dividamos $\mathscr{F}_1$ en dos iguales y con el mismo criterio designemos con $\mathscr{F}_2$ el semiintervalo de la derecha si en ambos hay puntos, y si no, llamaremos $\mathscr{F}_2$ al de la izquierda.

Prosiguiendo indefinidamente tenemos una sucesión de intervalos, $\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2, \ldots$, cada uno contenido en el anterior, cuyos extremos definen un punto, cuya abscisa es un número real. Este número es el límite de $\{x_n\}$, pues en todo entorno suyo hay intervalos $\mathscr{F}_n$ que son interiores y, por tanto, puntos $\{x_n\}$ contenidos en dicho entorno.

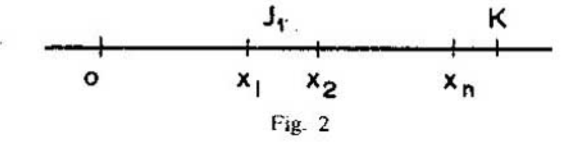


Fig. 2

EJEMPLO:

Cálculo del límite $\lim_{n\to\infty} q^n$.

Consideremos primero el caso en que $q > 1$.

Si ponemos $q = 1 + r$, tenemos:

$$q^n = (1+r)^n = 1 + nr + \ldots > 1 + nr > nr \quad [1]$$

Como r es fijo y $n \to \infty$, también $q^n \to \infty$.

Si $q = 1$, $q^n = 1$, luego $\lim_{n \to \infty} q^n = 1$.

Si $|q| < 1$, tenemos que el número $q' = \dfrac{1}{|q|} > 1$; luego:

$$|q| = \frac{1}{q'} = \frac{1}{1 + r}$$

y en virtud de [1] tendremos:

$$|q|^n = \frac{1}{q'^n} = \frac{1}{(1 + r)^n} < \frac{1}{nr}$$

y como $\dfrac{1}{nr} \to 0$, también $|q|^n \to 0$, también evidentemente, $\lim_{n \to \infty} q^n = 0$.

Si $q < -1$, tenemos $q^n = \pm(-q)^n$; y como $(-q)^n$ es positivo y tiende a $+\infty$, la sucesión es divergente.

3. NUMERO e (DE EULER)

Supongamos 1 peseta colocada en un Banco que diera el 100 por 100 de interés. Durante un año se convertirá en $(1 + 1)^1 = 2$ pesetas. Si se acumulan los intereses cada seis meses, el tanto por uno semestral será 1/2 y la peseta se convertirá en $(1 + 1/2)^2$, cantidad que debe ser mayor.

Acumulando los intereses mensualmente, la peseta se convertirá en $(1 + 1/12)^{12}$. En general, si se divide el año en m partes, la peseta se convertirá en:

$$(1 + 1/m)^m$$

Es interesante averiguar en qué se convertirá la peseta a *interés continuo* en un año; es decir, si se permite la expresión, acumulando los intereses en cada instante. Para esto bastará hallar:

$$\lim_{m \to \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$$

Aplicando la fórmula del binomio, resulta:

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = 1 + m\frac{1}{m} + \frac{m(m-1)}{2!}\,\frac{1}{m^2} + \dots + \frac{1}{m^m} = 1 + 1 +$$
$$+ \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{m}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right) + \dots +$$
$$\frac{1}{m!}\left(1 - \frac{1}{m}\right) \dots \left(1 - \frac{m-1}{m}\right).$$

Si se compara esta expresión con la análoga para $\left(1 + \dfrac{1}{m+1}\right)^{m+1}$ (que el

alumno debe escribir), se ve que los términos de esta segunda son mayores desde el tercero en adelante y que además tiene más términos; luego la sucesión propuesta es monótona creciente. Como los binomios $1 - 1/m$, $1 - 2/m$ son menores que uno, tenemos:

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{m!} < 1 + 1 + \frac{1}{2} +$$

$$+ \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{m-1}} = 3 - \frac{1}{2^{m-1}}$$

Resulta, pues, que la sucesión es acotada, luego tiene límite. Este límite es el número irracional:

$$e = 2{,}718281 \ldots$$

cuya importancia es fundamental en Análisis y en las Ciencias de aplicación. Es la base de los llamados *logaritmos naturales* o neperianos, y, a pesar de su complicada definición introducen gran simplificación en muchas cuestiones.

Este tipo de acumulación, que a primera vista resulta artificioso, se presenta frecuentemente en los fenómenos naturales. Por ejemplo, el crecimiento de las células de un ser vivo. Un ser vivo (animal, vegetal) está formado por células y su crecimiento consiste en que cada célula da origen a nuevas células, éstas a otras, etc.

Tal expresión puede aplicarse, dentro de ciertos límites, en particular, al crecimiento de la madera de un bosque, al crecimiento de la población de una comarca, etc. También se aplica a las sustancias formadas en ciertas reacciones químicas.

4. CRITERIO DE BOLZANO-WEIERSTRASS

El teorema de la convergencia monótona no siempre es aplicable. Una condición general para la existencia de límite nos da el criterio de Cauchy, que ya hemos considerado anteriormente y que ahora estudiaremos de nuevo. Antes vamos a dar una nueva forma especial del *teorema de Bolzano-Weierstrass: toda sucesión acotada en* R *tiene una sucesión parcial convergente.*

Sea, en efecto, $\{x_n\}$ una sucesión acotada en R. Si solo hay un número finito de valores distintos en la sucesión, entonces uno al menos de ellos debe aparecer infinitas veces. Si definimos una sucesión parcial de $\{x_n\}$ incluyendo en ella dicho número cada vez que aparece, tendremos una sucesión parcial convergente. Supongamos que la sucesión contenga infinitos puntos distintos. Puesto que el conjunto es acotado, tendrá un punto de acumulación a. Sea una sucesión de entornos $E_n = E\left(a, \frac{1}{n}\right)$. En E_1 hay al menos un punto x_{n_1} de la

sucesión. El conjunto formado por los puntos $x_m (m > n_1)$ es infinito y tiene también como punto de acumulación a. En el entorno E_2 habrá al menos un punto x_{n_2} de la sucesión, etc. Tenemos así una sucesión parcial de la dada x_{n_1}, $x_{n_2}, \ldots$, tal que $x_{n_r} \to a$, ya que:

$$| x_{n_r} - a | < \frac{1}{r}$$

Lo que hemos demostrado en la segunda parte es que: *si x_n es una sucesión de R y a es un punto de acumulación de la misma, existe una sucesión parcial de dicha sucesión que tiene por límite a.*

5. CRITERIO GENERAL DE CAUCHY

La condición necesaria y suficiente para que una sucesión $\{ x_n \}$ de R sea convergente es que para cada $\varepsilon > 0$, exista un $N(\varepsilon)$ tal que si:

$$m_1 > N(\varepsilon) \text{ y } n_1 > N(\varepsilon) \text{ es } |x_m - x_n| < \varepsilon$$

La condición es necesaria, pues si es $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$, fijado $\varepsilon/2$, podemos determinar K tal que $| x_n - a | < \varepsilon/2$ para $n > K$: luego:

$$| x_m - x_n | \leqslant | x_m - a | + | x_n - a | < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

para $n > K$ y $m > K$.

Para probar la suficiencia comencemos por demostrar que *si $\{ x_n \}$ verifica la condición de Cauchy es acotada.* Fijado $\varepsilon = 1$, será.

$$| x_n - x_m | < 1$$

para $n > M$, $m > M$; luego $| x_n | < | x_m | + 1$ por la propiedad triangular. Luego si:

$$B = \sup \{ | x_1 |, | x_2 |, \ldots, | x_{n-1} |, | x_m | + 1 \}$$

será:

$$| x_n | \leqslant B$$

para todo n.

Como consecuencia del teorema de Bolzano-Weierstrass, resulta que toda sucesión, que verifica la condición de Cauchy, tiene una sucesión parcial convergente. Falta, pues, demostrar que:

Si es convergente hacia a una sucesión parcial x_{n_i} de una sucesión x_m que verifica la condición de Cauchy, la sucesión total es convergente hacia a.

Por ser $\lim\limits_{n \to \infty} x_{n_i} = a$, dado ε, se puede determinar $N(\varepsilon)$, tal que para $n_i > N(\varepsilon)$ es $| x_{n_i} - a | < \varepsilon$.

Análogamente por la condición de Cauchy, fijado ε se puede determinar $M(\varepsilon)$, tal que para $n > M(\varepsilon)$, $m > M(\varepsilon)$, sea $| x_m - x_n | < \varepsilon$, luego:

$$| a - x_n | < | a - x_m | + | x_m - x_n | < 2\,\varepsilon$$

siempre que $m = n_i > N(\varepsilon)$, y también $n > N(\varepsilon)$, luego $x_n \to a$.

EJEMPLOS:

1. Sea $x_1 = 1$, $x_2 = 2, \ldots, x_n = \dfrac{x_{n-2} + x_{n-1}}{2}, \ldots$. Es inmediato ver que la sucesión es acotada, ya que $1 \leq x_n \leq 2$; pero no es monótona creciente ni decreciente.

Es fácil ver que se verifica la condición de Cauchy. Se tiene:

$$|x_n - x_{n+1}| = \frac{|x_n - x_{n-1}|}{2}$$

luego:

$$| x_n - x_{n+1} | = \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$| x_m - x_n | \leq | x_n - x_{n+1} | + | x_{n+1} - x_{n+2} | + \ldots + | x_{m-1} - x_m | \leq$$

$$\leq \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} + \ldots + \frac{1}{2^{m-2}} < \frac{1}{2^{n-2}}$$

luego existe $\lim x_n = a$, podemos tomar límites en la relación:

$$x_n = \frac{x_{n-2} + x_{n-1}}{2}$$

y queda:

$$a = \frac{a + a}{2}$$

lo que es trivial.

Sin embargo, la sucesión parcial:

$$x_{2n+1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^{2n-1}} = 1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{4} \ldots + \frac{1}{4^{n-1}}\right) =$$

$$= 1 + \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right) \to \frac{5}{3}$$

luego:

$$x_n \to \frac{5}{3}$$

6. LIMITE DE OSCILACION

Todo número a tal que en todo intervalo $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ existen infinitos términos de la sucesión se llama *límite de oscilación* de la misma. Si entre estos límites hay un máximo, éste se llama *límite superior* de la sucesión y análogamente se define el *límite inferior*.

Se escribe $a = \overline{\lim}\, a_n$, $b = \underline{\lim}\, a_n$. Se demuestra por el método de partición de intervalos que *toda sucesión mayorada tiene un límite superior y toda sucesión minorada un límite inferior.*

EJEMPLO:

La sucesión:

$$a_{3p} = \frac{1}{p}, \qquad a_{3p+1} = -1 - \frac{1}{p}, \qquad a_{3p+2} = 1 + \frac{1}{p}$$

tiene $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = 1$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = -1$, y, además, 0 es otro límite de oscilación.

EJERCICIOS

1. Una bola de nieve pesa al iniciarse 2 kg. Al deslizar crece continuamente a una velocidad de 80 por 100 cada 10 m. ¿Cuál será su peso al cabo de 200 m.?

2. El radium se desintegra continuamente y tiene una vida media de 1.600 años. Determinar la cantidad de radium que quedará de 1 gm. al cabo de 3.200 años y al cabo de 5.000 años.

3. Probar que el $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right)$ es el número e.

4. Demostrar:

1.° Que entre los perímetros S_n y S_{2n} de los polígonos de n y $2n$ lados inscritos en la circunferencia de radio 1 existe la relación:

$$S_{2n} = 2n\sqrt{2 - \sqrt{4 - l_n^2}}$$

2.° Con esta fórmula y partiendo de que $l_4 = \sqrt{2}$, probar que:

$$\lim_{m\to\infty} 2m\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots \sqrt{2}}}} = \pi$$

3.° Probar que:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}} = 2$$

5. Probar que:

$$\lim_{k \to \infty} \left(\frac{k}{1 + k^2} \right) = 0$$

6. Demostrar que:

$$\lim_{k \to \infty} \frac{k^2}{1 + k^2} = 1$$

7. Calcular de cuánto dinero podrá disponer dentro de 12 años una persona que hoy coloca 1.700 pesetas a interés continuo al 5 por 100.

8. Al nacer un niño pusieron a su nombre 1.000 pesetas en una cartilla, con capitalización continua al 4 por 100. ¿Qué cantidad tendrá al cumplir los 25 años?

9. Dado un número x, ¿cuál de estas desigualdades es cierta?

$$\ln x \gtrless \log x$$

10. ¿Hay algún número para el que se verifique:

$$\ln x = \log x?$$

11. Hallar $\lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$

Determinar los límites para $n \to \infty$ de las siguientes variables:

12. $$\left(\frac{2n + 5}{2n}\right)^n$$

13. $$\left(\frac{4n + 3}{4n}\right)^{3n}$$

14. $$\left(\frac{n^2 - 2}{n^2}\right)^{2n^2}$$

15. $$\left(\frac{6n - 5}{6n}\right)^{\frac{3n}{2}}$$

CAPITULO 7

Cálculo de límites

1. PRODUCTO DE INFINITESIMOS

I. *Si los términos de la sucesión infinitésima* y_n *se multiplican por una constante* c, *la sucesión obtenida* cy_n *es infinitésima.*

Para que se verifique:

$$|cy_n| < \varepsilon$$

basta que:

$$|y_n| < \frac{\varepsilon}{c},$$

y esto es cierto desde un valor de n en adelante por ser y_n una sucesión infinitésima.

EJEMPLO:

Como la sucesión $y_n = \frac{1}{n}$ es infinitésima, también lo son las

$$z_n = \frac{3}{n}, \qquad u_n = \frac{7}{4n}, \qquad \text{y} \qquad x_n = \frac{c}{n}$$

II. *El producto de un infinitésimo* y_n *por una variable acotada* x_n, *es otro infinitésimo.*

Por ser x_n acotada, se verifica:

$$|x_n| < K$$

desde un valor de n en adelante; y por ser y_n infinitésima es:

$$|y_n| < \frac{\varepsilon}{K}$$

a partir de un cierto valor de n.

Por tanto, será:

$$|x_n y_n| = |x_n|\,|y_n| < K\frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon$$

desde un cierto valor de n en adelante.

EJEMPLO:

Para todo valor de n es

$$|x_n| = \left|\frac{n+1}{n+2}\right| < 1$$

luego es una sucesión acotada. Como $y_n = \frac{8}{n}$ es infinitésima, resulta

$$\lim_{n\to\infty} x_n\, y_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2}\,\frac{8}{n} = 0$$

III. *El producto de dos infinitésimos es otro infinitésimo.*
Es consecuencia del teorema anterior, pues x_n está acotado.

EJEMPLO:

Como $\frac{1}{n}$ es infinitésimo, también lo son

$$\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}, \quad \frac{5}{4n^3}, \quad \text{y en general,} \quad \frac{c}{n^p}$$

2. SUMA DE INFINITESIMOS

La suma algebraica de un número finito de infinitésimos es otro infinitésimo.
Lo demostraremos para dos sumandos x_n e y_n. Por hipótesis, se tiene:

$$|x_n| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ desde un valor de } n \text{ en adelante}$$

$$|y_n| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ desde un valor de } n \text{ en adelante}$$

luego:

$$|x_n + y_n| \leqslant |x_n| + |y_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

a partir de un valor de n.

EJEMPLO:

Se tiene

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3n^2} - \frac{5}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{-15n^2 + 2n + 2}{3n^2\,(n+1)} = 0$$

por ser

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{3n^2} = 0;\ \lim_{n\to\infty}\frac{5}{n+1} = 0$$

3. LIMITE DE UNA SUMA

LIMITES FINITOS.—I. *El límite de la suma algebraica de un número finito de variables es igual a la suma de los límites de estas variables.*

Si, por ejemplo, hay tres variables, resulta:

Por ser $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$, es $x_n - a$ un infinitésimo.

Por ser $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = b$, es $y_n - b$ un infinitésimo.

Por ser $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = c$, es $z_n - c_n$ un infinitésimo,

luego también la suma:

$$(x_n - a) + (y_n - b) + (z_n - c) = x_n + y_n + z_n - (a + b + c)$$

es otro infinitésimo. De donde resulta que $x_n + y_n + z_n$ tendrá por límite $a + b + c$, puesto que su diferencia es un infinitésimo.

EJEMPLO:

Para calcular el límite de

$$y^n = \frac{3n^4 + 2n^3 - 5n^2 + 6n - 1}{n^4}$$

se tiene en cuenta que:

$$y_n = 3 + \frac{2}{n} - \frac{5}{n^2} + \frac{6}{n^3} - \frac{1}{n^4}$$

luego, para $n \to \infty$, es:

$$\lim y_n = \lim 3 + \lim \frac{2}{n} - \lim \frac{5}{n^2} + \lim \frac{6}{n^3} - \lim \frac{1}{n^4} = 3 + 0 - 0 + 0 - 0 = 3.$$

LIMITES INFINITOS.—II. *Si uno o varios sumandos tienden a $+\infty$, la suma tiene por límite $+\infty$.*

En efecto: si es:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = +\infty, \quad \lim_{n \to \infty} y_n = b,$$

por grande que sea el número H que tomemos, será:

$$x_n > H \text{ desde un valor de } n \text{ en adelante,}$$

luego también será:

$$x_n + y_n > H \text{ a partir de un valor de } n.$$

Por tanto,

$$\lim_{n \to \infty} (x_n + y_n) = +\infty.$$

Análogamente,

III. *Si uno o varios sumandos tienden a $-\infty$, la suma tiene por límite $-\infty$.*
Es decir, si es:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = b,$$

resulta:

$$\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n = -\infty + b = -\infty.$$

IV. *Si un sumando tiende a $+\infty$ y otro a $-\infty$, con el sólo conocimiento de estos límites no puede determinarse el límite de la suma* (*).
Se dice entonces que el límite se presenta en la *forma indeterminada*,

$$+\infty - \infty,$$

expresión simbólica que sólo sirve para recordar los límites de los sumandos.

EJEMPLO:

Siendo

$$\lim_{n\to\infty} (-3n^2 + 5) = -\infty; \lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{n} = 2; \lim_{n\to\infty} \frac{7n+6}{n} = 7$$

resulta

$$\lim_{n\to\infty} \left(-3n^2 + 5 + \frac{2n-1}{n} + \frac{7n+6}{n}\right) = -\infty + 2 + 7 = -\infty.$$

4. LIMITE DE UN PRODUCTO

LIMITES FINITOS.—I. *El límite del producto de un número finito de variables es igual al producto de los límites de estas variables.*

Si, por ejemplo, hay dos factores x_n, y_n, cuyos límites son:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = b$$

queremos probar que:

$$\lim_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = a \cdot b$$

para lo cual basta ver que la diferencia:

$$x_n \cdot y_n - a \cdot b$$

es un infinitésimo.

(*) Lo mismo ocurre cuando los sumandos tienen límites ∞, sin signo determinado.

En efecto: sumando y restando $x_n \cdot b$ a esa diferencia, queda:

$$x_n y_n - ab = x_n y_n - ab + x_n b - x_n b = x_n y_n - x_n b + x_n b - ab =$$
$$= x_n (y_n - b) + b(x_n - a)$$

como a es el límite de x_n, la diferencia $x_n - a$ es un infinitésimo; luego también $b(x_n - a)$ es infinitésimo, por ser b constante.

Análogamente resulta para $x_n(y_n - b)$, pues $y_n - b$ es infinitésimo y x_n está acotada, por tener límite.

Por tanto, queda probado que $x_n y_n - ab$ es un infinitésimo; luego:

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = ab = \lim_{n\to\infty} x_n \lim_{n\to\infty} y_n$$

EJEMPLO:

Para $n \to \infty$, es

$$\lim \frac{(n-1)(2n-1)(5n+3)}{n(n+1)(n+2)} = \lim \frac{n-1}{n} \lim \frac{2n-1}{n+1} \lim \frac{5n+3}{n+2} =$$
$$= \lim \left(1 - \frac{1}{n}\right) \lim \left(2 - \frac{3}{n+1}\right) \lim \left(5 - \frac{7}{n+2}\right) = 1 \cdot 2 \cdot 5 = 10$$

Se demuestra fácilmente:

LIMITES INFINITOS.—II. *Si uno o varios de los factores tiende a $\pm\infty$ y ninguno de los restantes factores tiene por límite cero, el producto tiene por límite ∞.*

III. *Si un factor tiende a cero y otro a $\pm\infty$ con el sólo conocimiento de estos límites no puede determinarse el límite del producto.*

Se dice entonces que el límite se presenta en la *forma indeterminada*,

$$0 \cdot (\pm\infty)$$

expresión simbólica que no tiene otro alcance que el recordar los límites de los factores.

EJEMPLO:

Ya podemos calcular el

$$\lim_{n\to\infty} (5n^2 - 2n)$$

que quedó pendiente en el párrafo anterior.

En efecto, sacando n^2 factor común, queda

$$\lim_{n\to\infty} (5n^2 - 2n) = \lim_{n\to\infty} n^2 \left(5 - \frac{2}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} n^2 \cdot \lim_{n\to\infty} \left(5 - \frac{2}{n}\right) = +\infty \cdot 5 = +\infty$$

5. LIMITE DE UN COCIENTE

LIMITES FINITOS.—I. *El límite de un cociente de dos variables es igual al cociente de los límites del dividendo y del divisor, cuando el de éste es distinto de cero. Si el divisor tiende a cero y el dividendo hacia a, el límite del cociente es infinito.*

En el primer caso sea:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a, \qquad \lim_{n \to \infty} y_n = b \neq 0.$$

Vamos a demostrar que se verifica:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$$

Para ello basta probar que es infinitésima la diferencia:

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{bx_n - ay_n}{by_n}.$$

Como $y_n \to b \neq 0$, será $|y_n| > K > 0$, luego,

$$\frac{bx_n - ay_n}{by_n} < \frac{bx_n - ay_n}{bK} = \frac{1}{K} x_n - \frac{a}{bK} y_n$$

y como el límite de este último miembro es:

$$\frac{1}{K} \lim_{n \to \infty} x_n - \frac{a}{bK} \lim_{n \to \infty} y_n = \frac{1}{K} a - \frac{a}{bK} b = \frac{a}{K} - \frac{a}{K} = 0$$

queda demostrado que es infinitésima dicha diferencia.

En el segundo caso, la demostración es análoga.

II. *Si dividendo y divisor tienden hacia cero, con el sólo conocimiento de estos límites no puede determinarse el límite del cociente.*

Se dice que el límite se presenta en la *forma indeterminada* $\frac{0}{0}$ que no debe considerarse como un cociente, sino como un símbolo que recuerda que los dos términos de la fracción tienden a 0.

EJEMPLO:
Como

$$\lim x_n = \lim \frac{4n - 1}{5n + 2} = \lim \frac{n\left(4 - \frac{1}{n}\right)}{n\left(5 + \frac{2}{n}\right)} = \lim \frac{4 - \frac{1}{n}}{5 + \frac{2}{n}} = \frac{4 - 0}{5 + 0} = \frac{4}{5}$$

$$\lim y_n = \lim \frac{3}{n + 6} = 0$$

resulta que el cociente $\frac{x_n}{y_n}$ tendrá límite infinito.

LIMITES INFINITOS.—Fácilmente se demuestran estos teoremas:

III. *Si el dividendo tiende a* $\pm\infty$, *y el denominador tiene límite finito, el cociente tiende a* $\pm\infty$.

Es decir, si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \pm\infty \quad \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, resulta: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \pm\infty$.

IV. *Cuando el dividendo tiene límite finito y el divisor tiende a infinito, el cociente tiene límite cero.*

Es decir, si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a, \quad \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \pm\infty$, resulta: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = 0$.

V. *Si dividendo y divisor tienden a infinito, con el sólo conocimiento de estos límites no puede determinarse el límite del cociente.*

Se dice que el límite aparece bajo la *forma indeterminada*: $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$, símbolo carente de todo significado numérico.

EJERCICIOS

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n(n-1)(n+2)}{(n^2+1)(2n+3)} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3+\dots}{2n^3+\dots} = \dfrac{1}{2}$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^5-2n^2+1}{(4n^2-1)(2n^3+1)} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^5\dots}{8n^5\dots} = \dfrac{3}{8}$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(4n^3+2)(5n-1)}{(6n-3)(n^2+1)} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{20n^4\dots}{6n^3\dots} = \infty$

4. ¿Es aplicable el teorema del límite de la suma de infinitésimos al caso
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\dots+\frac{1}{n}\right)?$$

5. Calcular los límites, para $n\to\infty$, de las siguientes variables:
$$a_n = \frac{2n^2+1}{5n^2-3n} + \frac{6n+7}{3n-2}$$
$$a_n = \frac{3n^2+n-1}{4n^3-n+2}$$

CAPITULO **8**

Series numéricas

1. NOCION DE SERIE

Dada una sucesión de números reales:

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n, \ldots \qquad [1]$$

podemos deducir otra:

$$S_0, S_1, S_2, \ldots, S_{n-1}, S_n, \ldots$$

del modo siguiente:

$$\begin{array}{llllll} S_0 = a_0 & & & & & \\ S_1 = a_0 & + & a_1 & & & \\ S_2 = a_0 & + & a_1 + a_2 & & & \\ \ldots & \ldots & & \ldots & \ldots & \\ \ldots & \ldots & & \ldots & \ldots & \\ S_n = a_0 & + & a_1 + \ldots + a_n & & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array} \qquad [2]$$

Esta nueva sucesión se suele representar abreviadamente por el símbolo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n + \ldots \qquad [3]$$

llamándole a tal símbolo *serie*.

Una *serie* es, pues, un símbolo $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$, que representa abreviadamente la sucesión de las sumas parciales deducidas, limitando la sumación al 1.°, al 2.°, al 3.°, ..., sumandos o términos de la serie.

Si esta sucesión de sumas parciales es convergente, es decir, si existe:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = S$$

la serie se denomina *convergente* y a este número S se llama *suma* de la serie y se escribe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S$$

En caso contrario, la serie se llama *divergente*.

Si es $\lim_{n\to\infty} S_n = \pm\infty$, la serie se llama *simplemente divergente* y si no existe $\lim_{n\to\infty} S_n$, la serie se llama *oscilante*.

A la suma:

$$R_k = \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$$

se llama *resto* de índice k de la serie dada.

De las relaciones [2], se obtiene:

$$\begin{aligned} a_0 &= S_0 \\ a_1 &= S_1 - S_0 \\ a_2 &= S_2 - S_1 \\ &\;\;\vdots \\ a_n &= S_n - S_{n-1} \end{aligned}$$

que permiten pasar de la sucesión $\{S_n\}$ a la $\{a_n\}$. Vemos así que la correspondencia $\{a_n\} \leftrightarrow \{S_n\}$ define una aplicación biunívoca del conjunto E de todas las sucesiones $\{a_n\}$ de números reales sobre el mismo E de todas las sucesiones $\{S_n\}$.

EJEMPLOS:

1° La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

equivale a la sucesión:

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} = \frac{1 - \dfrac{1}{2^{n+1}}}{1 - \dfrac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^n}$$

cuando $n \to \infty$, $S_n = 2 - \frac{1}{2^n} \to 2$, es decir, la serie es convergente y su suma es $S = 2$.

Esta serie y otras fueron manejadas ya por griegos que las introdujeron con la famosa paradoja de Aquiles y la tortuga. Supongamos que al empezar a andar Aquiles dista 1 metro de la tortuga, y que la velocidad de ésta es la mitad que la velocidad de Aquiles, que suponemos es de 1 m/s. Cuando Aquiles llega a B la tortuga está en C, cuando Aquiles llega a C la tortuga se encuentra en D, etc.

1 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$

A B C D E L

Fig. 1

Parece, al enunciarse sucesivamente los sucesos, que Aquiles no alcanzará nunca a la tortuga, cuando en realidad lo que sucede es que la encuentra al final de la suma de tiempos:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

suma que es finita e igual a 2.

2.° La serie: $1 - 1 + 1 - 1 \pm \dots$ es oscilante.

3.° La serie geométrica $1 + a + a^2 + \dots + a^n + \dots$ converge si $|a| < 1$, diverge si $|a| > 1$ ó $a = 1$, y es oscilante si $a = -1$.

Las sumas parciales son:

$$S_n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$$

Si suponemos $|a| < 1$, $S_n \to 1/(1 - a)$ y la serie es convergente, siendo su suma.

$$S = \frac{1}{1 - a}$$

Si es $a = 1$, la serie es $1 + 1 + \dots + 1 + \dots$, luego resulta simplemente divergente, pues:

$$S_n = n + 1 \to + \infty$$

Si es $a = -1$, la serie es $1 - 1 + 1 - 1 + \dots \pm 1 \pm \dots$ que es oscilante.

Si $|a| > 1$:

$$S_n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} = \frac{1}{1 - a} - \frac{a^{n+1}}{1 - a} \to \infty,$$

es decir, la serie es divergente.

En resumen:

Si $|a| < 1$ serie convergente

Si $|a| > 1$ serie divergente

Si $a = 1$ ó $|a| > 1$ serie simplemente divergente

Si $a = -1$ serie oscilante

4.º Una fracción decimal:

$$x = N, abc \ldots k \ldots$$

puede ponerse en forma de serie:

$$x = N + \frac{a}{10} + \frac{b}{100} + \ldots + \frac{k}{10^n} + \ldots$$

Si la fracción es periódica, la serie es una progresión indefinida.

Utilice el lector esta idea para obtener como ejercicio la forma de quebrado que corresponde a las fracciones decimales periódicas puras y mixtas.

2. CONDICION NECESARIA DE CONVERGENCIA

Si la serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

es convergente, el término general debe tender a cero.

Pues:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n \to \infty} S_n - \lim_{n \to \infty} S_{n-1} = S - S = O.$$

Esta condición necesaria no es suficiente, como lo prueba el ejemplo de la serie llamada armónica:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

en que el término n-simo tiende a cero, y, sin embargo, es divergente, pues se tiene:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \ldots >$$

$$> \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \ldots =$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots = \lim_{n \to \infty} \left(1 + n \frac{1}{2}\right) = \infty.$$

Si a_n no tiende a cero, la serie es divergente, pues si fuera convergente $a_n \to 0$.

3. CRITERIO GENERAL DE CONVERGENCIA DE CAUCHY PARA SERIES

La condición necesaria y suficiente para que la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

sea convergente es que dado $\varepsilon > 0$, *arbitrariamente pequeño, se pueda determinar un número* N, *de modo que sea:*

$$|a_n + a_{n+1} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon$$

siempre que $n > N$ *y cualquiera que sea* p.

Es una consecuencia inmediata del criterio correspondiente para sucesiones.

Además, como la acotación:

$$|a_n + a_{n+1} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon$$

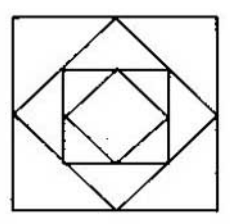
vale fijado n, cualquiera que sea p, podemos pasar al límite y tendremos:

$$|a_n + a_{n+1} + \dots| < \varepsilon,$$

es decir: *el resto* R_n *de una serie convergente tiene límite cero cuando* $n \to \infty$.

EJERCICIOS

1. Hallar el valor de la serie formada por los números que expresan las superficies de los sucesivos cuadrados siguientes:



2. Si es S la suma de los términos de una progresión geométrica indefinida y S' la serie cuyos términos son los cuadrados de la progresión, hallar la razón y el primer término de la progresión dada.

CAPITULO 9

Propiedades de las series

1. GENERALIDADES

Como hemos visto una serie es la asociación del algoritmo de suma con el paso al límite. Tiene, pues, interés ver qué propiedades de las sumas finitas se conservan y cuáles no en las series.

En primer lugar, se observa que, como consecuencia de la definición, el carácter de convergencia o divergencia no se altera modificando o agrupando *un número finito* de términos de la serie. Es decir, tal carácter se refiere al comportamiento para los términos de lugar n, tan grande como queramos, y, por tanto, no es alterado por las modificaciones de un número finito de términos iniciales.

2. PROPIEDAD ASOCIATIVA

En una serie convergente se pueden sustituir grupos de términos consecutivos por su suma sin que se altere el carácter de la serie.

De la serie:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

se deduce la:

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_i) + (a_{i+1} + \dots + a_j) + \dots$$

y llamando s_n a las sumas parciales de la primera y S_n a las de la segunda, se tiene $s_i = S_1$, $s_j = S_2$, ..., luego la sucesión S_n es una sucesión parcial de la s_n, y tiene, por tanto, el mismo carácter, como puede verse fácilmente.

Por este proceso podemos deducir de una serie oscilante una serie convergente.

EJEMPLO:

De la serie oscilante $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ deducimos la serie convergente: $(1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0 + 0 + \dots$

Sin embargo, *si el término general tiende a cero y las agrupaciones de términos consecutivos se realizan con un número acotado de términos, la nueva serie es convergente o divergente al mismo tiempo que la primera.*

La parte nueva de este teorema se refiere a que si la sucesión $s_1, s_2, \dots s_n \dots$ es divergente lo es la $s_i = S_1, s_j = S_2, \dots$ En efecto, si ésta fuera convergente también lo sería la s_n, ya que s_n se puede escribir: $s_n = S_k + a_v + a_{v+1} + \dots + a_n$ en que el número acotado de términos $a_v + \dots + a_n \to 0$.

Este teorema permite reducir el estudio de la serie $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ a la serie $\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots$

La propiedad *disociativa* no vale, en general, es decir, no pueden descomponerse los términos en suma de varios, pues la nueva serie puede no ser convergente.

3. PROPIEDAD DISTRIBUTIVA

Si la serie $\sum_1^\infty a_n$ *es convergente y su suma es* s, *la serie* $\sum_1^\infty ka_n$ *es también convergente y su suma es* ks. *Si la primera serie es divergente también lo es la segunda.*

Basta tener en cuenta que para las sumas parciales se verifica:

$$\sum_1^m ka_n = k \sum_1^m a_n.$$

4. PROPIEDAD CONMUTATIVA Y CONVERGENCIA ABSOLUTA

Veamos si la propiedad conmutativa de la suma subsiste cuando se trata de una serie.

Sea, por ejemplo, la serie convergente $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ cuya suma es $s = \log 2$.

Alterando el orden de los términos, se tiene la siguiente serie:

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} + \dots =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \dots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2}\right) -$$

$$- \frac{1}{4n} + \dots = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \log 2.$$

Se ve en este ejemplo que *alterando el orden de los términos varía el valor de la suma de la serie.*

Una serie se dice *incondicionalmente* o *conmutativamente convergente* cuando su convergencia es invariable al alterar el orden de los términos.

Una serie $\sum_{1}^{\infty} a_n$ se llama *absolutamente convergente* cuando es convergente la serie $\sum_{1}^{\infty} |a_n|$ formada con los valores absolutos de sus términos.

Si una serie es absolutamente convergente es convergente.

Por ser:

$$|a_{n+1} + \dots + a_{n+p}| < |a_{n+1}| + \dots + |a_{n+p}|$$

el criterio de Cauchy demuestra la afirmación del teorema.

La recíproca no es cierta como lo prueba el ejemplo de la serie armónica alternada:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

5. TEOREMA

Si una serie de términos positivos es convergente, su suma es independiente del orden de los mismos y si es divergente, continúa siéndolo de cualquier manera que se altere el orden de sus términos.

Sean Σ y Σ' la serie primitiva y la obtenida alterando el orden de los términos.

Si es S la suma de Σ, podemos elegir un índice n tal que la suma S_n de Σ sea mayor que $S - \varepsilon$, siendo $\varepsilon > 0$ tan pequeño como se quiera. Ahora bien, como Σ' contiene todos los términos de Σ, podemos elegir, evidentemente, un nuevo índice m' tal que la suma $\sigma_{m'}$ de Σ' sea mayor que $S - \varepsilon$ sin más que tomar el índice m' de tal modo que $\sigma_{m'}$ contenga todos los términos de S_m (y, en general, algunos más). Por tanto, para todo valor del índice $v > m'$ se verifica:

$$S > \sigma_v > S - \varepsilon,$$

luego la serie Σ' converge hacia S.

Si la serie Σ diverge, la Σ' no puede ser convergente, puesto que hemos demostrado anteriormente que si Σ' converge, también converge Σ.

Después de demostrado este teorema es inmediata la demostración del siguiente.

6. TEOREMA DE DIRICHLET

Si una serie es absolutamente convergente, es incondicionalmente convergente.

Sean las series Σa_n y $\Sigma |a_n|$. Formemos la serie $\Sigma[a_n + |a_n|]$ cuyos términos son todos positivos y a lo sumo iguales al duplo de los correspondientes en $\Sigma |a_n|$.

Supongamos la serie $\Sigma|a_n|$ convergente y de suma s y la Σa_n de suma σ, si llamamos S a la suma de $\Sigma[a_n + |a_n|]$ se tendrá, evidentemente, $S = s + \sigma$.

Sean S'_n, s'_n, σ'_n los valores que toman las sumas parciales n-simas de dichas series al reordenar la serie Σa_n y aplicar la misma reordenación a las otras. Se tiene la relación $S'_n = \sigma'_n + s'_n$. Por el teorema anterior $\sigma'_n \to \sigma$, $s'_n \to s$, luego $\lim\limits_{n\to\infty} (\sigma'_n + s'_n) = \sigma + s = S$; $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma'_n = \lim\limits_{n\to\infty} (S'_n - s'_n) = \lim\limits_{n\to\infty} S' - \lim\limits_{n\to\infty} s'_n = S - s$.

7. TEOREMA DE RIEMANN

Si una serie converge, pero no absolutamente, su suma puede tomar un valor arbitrario prefijado y hacerse divergente u oscilante mediante una alteración conveniente del orden de los términos.

Sean C_m y B_n los valores de las sumas de los m primeros términos positivos y los n primeros negativos de la serie $\Sigma\, a_n$ que cumple las condiciones del enunciado. Por tanto, se verifica que:

$$\lim (C_m + B_n) = +\infty \qquad \lim (C_m - B_n) = \sigma$$

suponiendo que m y n tienden ambos a infinito.

Además:

$$\lim_{m\to\infty} C_m = +\infty; \qquad \lim_{n\to\infty} B_n = +\infty$$

Fijemos un valor arbitrario A y veamos que la suma de la serie $\Sigma\, a_n$, convenientemente ordenada, toma dicho valor.

En efecto: sea m_1 el menor índice que cumple la condición $C_{m_1} > A$ y análogamente sea n_1 el menor que verifica $C_{m_1} - B_{n_1} < A$.

Ordenamos la serie escribiendo en primer lugar los m_1 primeros términos positivos y después los n_1 primeros negativos, dejando todos los demás en el orden que tenían primitivamente.

Siendo A_v, la suma de los v primeros términos de esta serie, se tiene:

$$A_v < A \quad \text{para} \quad v < m_1$$

$$A_v > A \quad \text{para} \quad m_1 \leqslant v < m_1 + n_1$$

Continuando el proceso construyamos una tercera suma con los dos primeros grupos de términos iguales a la anterior, en tercer lugar un grupo de $(m_2 - m_1)$ términos positivos en que m_2 es el menor índice tal que$C_{m_2} > B_{n_1} + A$ y en cuarto lugar otro grupo de $(n_2 - n_1)$ términos negativos, siendo n_2 el menor índice que cumple la condición $C_{m_2} - B_{n_2} < A$ escribiendo los demás términos en el orden que tenían en la primitiva serie.

Siguiendo indefinidamente este proceso resulta que como el término general de la serie tiende a cero, se verifica:

$$\lim_{\nu \to \infty} A_\nu = A.$$

El proceso para probar que también se puede construir a partir de la serie dada otra divergente u oscilante no difiere del anterior y lo dejaremos como ejercicio al lector.

Como consecuencia de éste resulta el recíproco del Teorema de Dirichlet: *Si una serie es incondicionalmente convergente es absolutamente convergente*, pues si no, se podría alterar convenientemente el orden de los términos y obtener una serie divergente lo que es contrario a la hipótesis.

EJERCICIOS

1. Dada la serie $\Sigma (-1)^{n+1} \dfrac{1}{n}$ escribir los 8 primeros términos de una serie reordenada de suma 3.

2. Si designamos por $S(p, q)$ la serie obtenida de la anterior tomando p terminos positivos, a continuación q negativos, luego p positivos, etc. probar que $S(p, q) = \ln 2 + \dfrac{1}{2} \ln \left(\dfrac{p}{q} \right)$.

CAPITULO **10**

Criterios de convergencia

1. INTRODUCCION

El problema de averiguar la convergencia de una serie es el mismo de existencia de límite de una sucesión. Sin embargo, es interesante dar *criterios de convergencia*, es decir, condiciones sencillas que permiten deducir del comportamiento de los términos de la serie, la convergencia o no de la misma.

2. SERIES ALTERNADAS

Se llaman así aquellas cuyos términos tienen alternativamente los signos $+$ y $-$.

EJEMPLO:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \pm \frac{1}{n} \pm \dots$$

TEOREMA DE LEIBNITZ. *Una serie alternada tal que los valores absolutos de sus términos forman una sucesión decreciente, es convergente si el término general tiende a cero y sólo en este caso.*

Para las sumas parciales se tiene:

$$S_{2n} = (a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots - a_{2n-2}) + (a_{2n-1} - a_{2n}) > S_{2n-1}$$

por ser:

$$a_{2n-1} > a_{2n};$$

$$S_{2n+1} = (a_1 - a_2 + \dots + a_{2n-1}) - (a_{2n} - a_{2n+1}) < S_{2n-1}$$

por ser:

$$a_{2n} > a_{2n+1};$$

luego:

$$S_2 < S_4 < S_6 < \dots \quad \text{y} \quad S_1 > S_3 > S_5 > \dots$$

es decir, las sumas pares forman sucesión creciente y las impares decrecientes.

Además:

$$S_{2n} - S_{2n-1} = a_{2n} \to 0$$

y

$$S_{2n+1} - S_{2n} = a_{2n+1} \to 0$$

puesto que el término general tiende a cero por hipótesis, luego son dos sucesiones monótonas convergentes que definen un número real que es la suma de la serie.

Además, si no se verifica la condición $a_n \to 0$, las dos sucesiones no tienen límite común, como lo prueba el ejemplo de la serie:

$$1 - \frac{3}{4} + \frac{4}{6} - \frac{5}{8} + \frac{6}{10} - \dots \qquad \text{en que} \qquad a_n = \frac{n+1}{2 \cdot n} \to \frac{1}{2}$$

Tampoco es convergente la serie:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{8} + \frac{1}{7} - \frac{1}{16} + \dots$$

que verifica la condición $a_n \to 0$, pero sus términos no forman una sucesión monótona.

3. SERIES DE TERMINOS POSITIVOS

En una serie de términos positivos, las sumas parciales forman una sucesión monótona. Como consecuencia inmediata del criterio de convergencia de sucesiones monótonas, resulta:

Una condición suficiente para la convergencia de una serie de términos positivos es que las sumas parciales formen una sucesión acotada.

Vemos, pues, que las series de términos positivos pueden ser convergentes (si las sumas parciales son acotadas) o divergentes (en caso contrario), pero nunca oscilantes.

4. CRITERIO GENERAL DE GAUSS

Una serie de términos positivos es convergente, si desde un lugar en adelante sus términos no superan a los correspondientes de otra serie convergente (mayo-

rante). Es divergente si sus términos no son menores que los de otra serie de términos positivos (minorante) divergente.

En efecto, en el primer caso las sumas parciales de la primera serie están acotadas por la suma de la segunda serie, luego la serie es convergente. Análogamente en el segundo caso.

EJEMPLOS:

1.° Sea la serie:

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^n} + \dots \qquad [1]$$

cada término de esta serie, a partir del 3.°, es menor que el correspondiente de la progresión geométrica indefinida:

$$1 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

que es convergente y, por tanto, la serie [1] también lo es.

2.° Sea la serie:

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots$$

cuyos términos son mayores que los correspondientes de la serie armónica:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

y, por tanto, es divergente.

5. CRITERIO DE SEGUNDA ESPECIE

Una serie de términos positivos Σa_n tales que desde un valor de n en adelante la razón $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}$ siendo la serie Σb_n convergente, la serie Σa_n es convergente.

Se tiene: $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}$, $\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \leqslant \frac{b_{n+2}}{b_{n+1}}$, ... $\frac{a_{n+k}}{a_{n+k-1}} \leqslant \frac{b_{n+k}}{b_{n+k-1}}$,

luego multiplicando:

$$\frac{a_{n+k}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+k}}{b_n} \therefore a_{n+k} \leqslant \frac{a_n}{b_n} \cdot b_{n+k}$$

y se aplica el criterio de la mayorante.

6. CRITERIO DE LA RAIZ

Si la serie de términos positivos Σa_n es tal, que desde un valor n en adelante se verifica:

$$\sqrt[n]{a_n} \leqslant a < 1$$

la serie es convergente. Si desde un valor de n en adelante es:

$$\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1$$

la serie es divergente.

En el primer caso la serie tiene como mayorante desde ese valor de n en adelante la progresión:

$$1 + a + a^2 + \dots + a^n + \dots$$

de razón $a < 1$, que es convergente, luego también lo es la dada.

La divergencia resulta en el segundo caso de que la serie tiene como minorante desde un valor de n en adelante la serie:

$$1 + 1 + 1 + \dots + 1 + \dots$$

EJEMPLO:

Ver si la serie $\sum_{n=1}^{n=\infty} n^{n+1}$ es convergente.

En efecto, aplicando el criterio anterior se tendrá:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^n} \lim_{n\to\infty} n = \infty$$

luego la serie es divergente.

7. CRITERIO DEL COCIENTE

Si en la serie de términos positivos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se verifica desde un valor de n en adelante:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \alpha < 1$$

la serie es convergente. Si se verifica.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$$

la serie es divergente. Basta aplicar el criterio de segunda especie.

Frecuentemente tienen límites el cociente:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \qquad \text{o la raíz} \qquad \sqrt[n]{a_n}$$

Si uno de dichos límites es k podemos decir que si k es menor que uno, *la serie es convergente;* si $k > 1$ *la serie es divergente*, y si $k = 1$ no puede asegurarse nada en general, pero si dicho cociente o raíz *se conservan constantemente superiores a* 1, *la serie es divergente.*

EJEMPLO:

Para ver si la serie

$$\sum_1^\infty \frac{n(n+1)x^{n-1}}{2}$$

es convergente, el criterio del cociente nos da

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} x\,\frac{n+1}{n-1} = x$$

luego la serie es convergente para $|x| < 1$.

8. SERIES DE TERMINOS ASINTOTICAMENTE PROPORCIONALES

a) *Si* $\Sigma\, a_n$ *es convergente, también lo es* $\Sigma\, a_n\, \beta_n$, *en que los números* β_n *son tales que* $0 \leqslant \beta_n < K$.

b) *Si* $\Sigma\, b_n$ *es divergente, lo es* $\Sigma\, b_n\, y_n$ *en que* $y_n > k > 0$.

a) Para las sumas parciales de la serie $\Sigma a_n\, \beta_n$, se verifica:

$$\sum_{n=1}^m a_n\,\beta_n \leqslant \sum_1^m a_n k = k\sum_1^m a_n$$

de donde, aplicando el criterio general de Gauss, resulta la convergencia. Análogamente se demuestra *b*).

Como caso particular, *las dos series tienen el mismo carácter si sus términos* v_n, u_n *son asintóticamente proporcionales*, pues si es:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{v_n}{u_n} = k > 0$$

desde un valor de n es:

$$0 < k - \varepsilon \leqslant \frac{v_n}{u_n} \leqslant k + \varepsilon,$$

o sea:

$$(k - \varepsilon)\, u_n \leqslant v_n \leqslant (k + \varepsilon)\, u_n$$

EJEMPLOS:

1. $\Sigma \dfrac{1}{(2n+1)^a}$ es convergente para $a > 1$; divergente para $a < 1$.

2. $\Sigma \dfrac{1}{p_n}$, en que p_n son los números primos es convergente si lo es $\Sigma \dfrac{1}{n^a}$, pues sólo tiene algunos términos de ésta.

3. $\Sigma \dfrac{1}{1+n^2}$ es convergente, pues $\dfrac{1}{1+n^2} \simeq \dfrac{1}{n^2}$

4. $\Sigma \dfrac{1}{\sqrt{n(1+n^2)}}$ es convergente, pues $\dfrac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}} \simeq \dfrac{1}{n^{1/2}}$

9. LA SERIE ARMONICA GENERAL

Hemos visto que la serie armónica $\Sigma \dfrac{1}{n}$ es divergente. De este criterio resulta que la serie armónica generalizada $\Sigma \dfrac{1}{n^\mu}$ es también divergente si $\mu < 1$. En el caso de ser $\mu > 1$, la serie tiene sus términos menores que los de la:

$$1 + \frac{1}{2^\mu} + \frac{1}{2^\mu} + \frac{1}{4^\mu} + \frac{1}{4^\mu} + \frac{1}{4^\mu} + \frac{1}{4^\mu} + \frac{1}{8^\mu} + \frac{1}{8^\mu} + \ldots =$$

$$= 1 + \frac{1}{2^{\mu-1}} + \frac{1}{4^{\mu-1}} + \frac{1}{8^{\mu-1}} + \ldots$$

que es una progresión geométrica que, por ser su razón $\dfrac{1}{2^{\mu-1}} < 1$, es convergente; luego *si $\mu > 1$ la serie armónica es convergente.*

10. CRITERIOS LOGARITMICOS DE CONVERGENCIA

Los criterios precedentes se deducen de la comparación con progresiones convergentes. Cauchy ha deducido nuevos criterios de convergencia comparando con la serie armónica general: $\dfrac{1}{n^\mu}$. Ya hemos visto que esta serie es divergente si $\mu \leqslant 1$ y convergente si $\mu > 1$.

Demostremos ahora el siguiente criterio: *Si desde un valor de* n *es* $\dfrac{\ln \dfrac{1}{u_n}}{\ln n} > k > 1$, *la serie es convergente. Si* $\dfrac{\ln \dfrac{1}{u_n}}{\ln n} < k < 1$, *la serie es divergente.*

En el primer caso de la relación:

$$\ln \frac{1}{u_n} > k \ln n = \ln n^k$$

resulta que $u_n < n^{-k}$; *luego la serie es convergente.*
Análogamente en el segundo caso.

De aquí se deduce que *cuando existe* $\lim \dfrac{\ln \dfrac{1}{u_n}}{\ln n} = L$, *la serie es convergente si* $L > 1$, *y divergente si* $L < 1$. *Hay duda si* $L = 1$.

Se tienen nuevos criterios logarítmicos comparando con las series:

$$\Sigma \frac{1}{n(\ln n)^\mu}, \qquad \Sigma \frac{1}{n \ln n (\ln n)^\mu}, \ \ldots$$

que son muy lentamente convergentes.

11. CRITERIO DE RAABE

Utilizando como término de comparación la serie armónica $\Sigma \dfrac{1}{n^a}$ resulta el siguiente criterio de Raabe:

Si desde un valor de n *en adelante se verifica:*

$$\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right) \cdot n \begin{cases} \leqslant -a < -1, & \text{es } \Sigma a_n \text{ convergente} \\ \geqslant -1, & \text{es } \Sigma a_n \text{ divergente} \end{cases}$$

En efecto, en el primer caso se tiene:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant 1 - \frac{a}{n} < \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^a = \frac{n^a}{(n+1)^a} = \frac{\dfrac{1}{(n+1)^a}}{\dfrac{1}{n^a}} \ (*)$$

(*) La relación:

$$1 - \frac{a}{n+1} < \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^a$$

de la cual es consecuencia la:

$$1 - \frac{a}{n} < \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^a$$

se demuestra fácilmente.

y aplicando el criterio de segunda especie, teniendo en cuenta la convergencia de la serie $\Sigma \frac{1}{n^a}$ si $a > 1$, resulta el criterio.

Análoga demostración en el segundo caso.

EJERCICIOS

1. Estudiar la convergencia de las series $\sum_0^\infty (-1)^n \frac{n!}{n^n}$

2. $\sum_1^\infty \frac{n^2+1}{na^n}$ 3. $\sum_0^\infty \frac{n^2}{(n+1)!}$ 4. $\sum_0^\infty \frac{n}{(n+1)(n+2)}$

5. $\sum_1^\infty \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ 6. $\frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \ldots$

7. La serie $\Sigma \frac{(-1)^{n+1}}{n + (-1)^{n+1}}$ no es absolutamente convergente y por otra parte no verifica el criterio de las series alternadas. ¿Es convergente?

(**) Véase S. Rios, *Problemas de Análisis*, Madrid, 1965.

CAPITULO **11**

Sumación de series

1. SUMACION DE SERIES POR DISOCIACION

El problema de obtener la suma de una serie es un problema de obtener un límite y suele ser complicado. Nos proponemos dar aquí sólo algunos métodos sencillos.

Sea la serie:

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

y supongamos que se ha podido expresar cada término en forma de diferencia:

$$u_n = s_n - s_{n+1}$$

Entonces la serie toma la forma:

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots = (s_0 - s_1) + (s_1 - s_2) + \dots + (s_n - s_{n+1}) + \dots$$

y la suma parcial n-sima es:

$$U_n = (s_0 - s_1) + (s_1 - s_2) + \dots + (s_n - s_{n+1}) = s_0 - s_{n+1}$$

luego:

$$U = \lim_{n \to \infty} U_n = s_0 - \lim_{n \to \infty} s_{n+1} = s_0 - S$$

supuesto existente y conocido $\lim_{n \to \infty} s_n = S$.

EJEMPLOS:

se demuestra fácilmente.

1. $$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots = 1$$

2. $$\frac{3}{1\cdot 2}-\frac{5}{2\cdot 3}+\frac{7}{3\cdot 4}-\frac{9}{4\cdot 5}\pm\ldots=\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)-$$
$$-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)\pm\ldots=1$$

3. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=\Sigma\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)=1$$

4. $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n^2+2n+1}{n^2(n+1)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}\right)=-1$$

Dentro de este método entran las series de término general.

$$u_n=\frac{a_1 n^p+a_2 n^{p-1}+\ldots+a_p}{(n+\alpha)(n+\beta)\ldots(n+\lambda)}.$$

Se descompone u_n en fracciones de la forma:

$$\frac{a_1 n^p+a_2 n^{p-1}+\ldots+a^p}{(n+\alpha)(n+\beta)\ldots(n+\lambda)}=\frac{A_1}{n+\alpha}+\frac{A_2}{n+\beta}+\ldots+\frac{A_e}{n+\lambda}.$$

Para calcular A_1, A_2 ... A_e, se hacen operaciones en el segundo miembro y se igualan los coeficientes de las potencias de n en ambos miembros.

EJEMPLOS:

1. Suponiendo a distinto de $0, -1, -2, \ldots$, es:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(a+n)(a+n+1)}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{a+n}-\frac{1}{a+n+1}\right)=\frac{1}{a}$$

2. $$\sum_{0}^{\infty}\frac{1}{(a+n)(a+n+1)(a+n+2)}=$$
$$=\sum_{0}^{\infty}\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(a+n)(a+n+1)}-\frac{1}{(a+n+1)(a+n+2)}\right]=\frac{1}{2a(a+1)}$$

3. $$\sum_{0}^{\infty}\frac{1}{(2+n)(2+n+1)\ldots(2+n+p)}=\frac{1}{p}\,\frac{1}{2\cdot 3\ldots(2+p-1)}$$

Un tipo más general de series $\Sigma\, u_n$ es aquel en que el término u_n *se descompone en la forma* $u_n = s_n - s_{n+q}$ donde q es un número natural fijo. En este caso, si $lim\ s_n = S$, se verifica que la suma de la serie es:

$$\sum_{n=0}^{\infty}u_n=s_0+s_1+\ldots+s_{q-1}-qS$$

En efecto, suponiendo $n > q$ se tiene:

$$U_n = (s_0 - s_q) + (s_1 - s_{q+1}) + \dots + (s_{q-1} - s_{2q-1}) + (s_q - s_{2q}) +$$
$$(s_{q+1} - s_{2q+1}) + \dots + (s_n - s_{n+q}) = s_0 + s_1 + \dots + s_{q-1} - (s_{n+1} +$$
$$+ s_{n+2} + \dots + s_{n+q})$$

luego:

$$\lim_{n\to\infty} U_n = s_0 + s_1 + \dots + s_{q-1} - qS.$$

EJEMPLOS:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(a+n)(a+n+q)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{q}\left(\frac{1}{a+n} - \frac{1}{a+n+q}\right) = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a+1} + \dots +\right.$$
$$\left. + \frac{1}{a+q-1}\right)$$

Para $a = 2$, $q = 2$, resulta:

$$\frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{4\cdot 6} + \dots = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{5}{12}$$

Para $a = \frac{1}{2}$, $q = 3$:

$$\frac{1}{1\cdot 7} + \frac{1}{3\cdot 9} + \frac{1}{5\cdot 11} + \dots = \frac{23}{90}$$

TEOREMA. *Si el término general de la serie $\Sigma\, a_n$ se puede expresar en la forma:*

$$a_n = c_1\, x_{n+1} + c_2\, x_{n+2} + \dots + c_k\, x_{n+k} \qquad (k \geqslant 2)$$

en que $\lim_{n\to\infty} x_n = \xi$ y los coeficientes c_k verifican la condición:

$$c_1 + c_2 + \dots + c_k = 0,$$

la serie $\Sigma\, a_n$ es convergente y

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = c_1\, x_1 + (c_1 + c_2)\, x_2 + \dots + (c_1 + \dots + c_{k-1})\, x_{k-1} +$$
$$+ (c_2 + 2c_3 + \dots + \overline{k-1}\; c_k)\xi$$

La demostración es análoga a la de los teoremas anteriores.

Ejemplos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n^2+1)(n+1^2+1)} = \frac{1}{2}$$

Basta ver que

$$x_{n+1} = \frac{1}{n^2+1}, \qquad k = 2, \qquad c_1 = +1, \qquad c_1 = -1$$

2. SERIES HIPERGEOMETRICAS

Cuando la razón de un término al anterior es una función lineal racional del índice del tipo:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\alpha n + \beta}{\alpha n + \gamma}$$

en que α, β, γ son constantes y α y γ, no ambos simultáneamente nulas la *serie* se llama *hipergeométrica.*

Si damos a n los valores 1, 2, ..., $m-1$, obtenemos:

$$a_1(\alpha + \beta) = a_2(\alpha + \gamma)$$
$$a_1(2\alpha + \beta) = a_3(2\alpha + \gamma)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$a_{m-1}(\overline{m-1}\,\alpha + \beta) = d_m(\overline{m-1}\,\alpha + \gamma)$$

Sumando resulta:

$$S_{m-1}(\alpha + \beta) = (S_m - a_1)\,\gamma + a_m(m-1)\,\alpha$$

es decir:

$$S_m(\alpha + \beta) - a_m(\alpha + \beta) = (S_m - a_1)\,\gamma + a_m(m-1)\,\alpha$$

luego:

$$S_m = \frac{a_m(ma + \beta) - a_1\,\gamma}{\alpha + \beta - \gamma}$$

Basta, pues, para obtener la suma de la serie, calcular:

$$lim\ S_m = lim\ \frac{a_m(ma + \beta) - a_1\,\gamma}{\alpha + \beta - \gamma}$$

EJEMPLO:

La serie

$$\Sigma \frac{1}{n(n+1)}$$

es hipergeométrica, ya que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+2}$$

luego

$$S_m = \frac{\frac{1}{m(m+1)}\, m - 1}{-1} = \frac{m}{m+1} \to 1$$

EJERCICIOS

1. Sumar las siguientes series:

$$S = 1 + 2x + 2^2 x^2 + 2^3 x^3 + \dots$$

$$S = 1 - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{3^2} - \frac{x^3}{3^3} + \dots$$

$$S = 1 + 2x + 3x^2 + x^3 + 2x^4 + 3x^5 + x^6 + 2x^7 + 3x^8 + \dots$$

2. Sumar las progresiones indefinidas:

$$S = \frac{8}{5} + (-1) + \frac{5}{8} - \frac{5^2}{8^2} + \dots$$

$$\sum_0^\infty (-1)^n \frac{5^n}{8^n} \qquad \sum_0^\infty 3^{-n}$$

$$S = \frac{2}{4} + \frac{2 \cdot 3}{4 \cdot 5} + \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{4 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \dots + \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots (n+1)}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \dots (n+3)} + \dots$$

$$S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \dots + \frac{1}{n^2 - 1} + \dots$$

3. Sumar las series

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+4)} \qquad \sum_1^\infty = \frac{1}{(2n-1)2n(2n+1)(2n+2)}$$

CAPITULO **12**

Sucesiones y series dobles

1. SUCESIONES DOBLES

Se llama *sucesión doble* un conjunto de números s_{mn} que dependen de dos índices m, n que toman valores naturales 1, 2, 3, ... ad inf. Suelen denotarse en forma de tabla de doble entrada que se extiende indefinidamente por la derecha y por la parte inferior:

	1	2	3		n	
1	S_{11}	S_{12}	S_{13}	...	S_{1n}	...
2	S_{21}	S_{22}	S_{23}	·	S_{2n}	...
	...	...	...	...	...	...
	...	...	...	...	...	...
m	S_{m1}	S_{m2}	S_{m3}	...	S_{mn}	...
	...	...	...	...	...	...
	...	...	...	...	...	...

Se dice que *la sucesión S_{mn} es convergente y tiene un límite S si, dado un número arbitrariamente pequeño $\varepsilon > 0$, se puede determinar un entero N, tal que para $n > N$, $m > N$ se verifica:*

$$|S_{mn} - S| < \varepsilon$$

Se denota esto mediante el símbolo: $\lim_{(m,n)\to\infty} S_{mn} = S$, que no debe confundirse con el $\lim_{n\to\infty} (\lim_{m\to\infty} S_{mn})$, en la cual se hace crecer primero un índice y luego el otro.

Las sucesiones *divergentes y oscilantes* se definen exactamente igual que en el caso de sucesiones simples.

EJEMPLOS:

La sucesión $s_{mn} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ es convergente y $s = 0$.

La sucesión $s_{mn} = m + n$ es divergente.

La sucesión $s_{mn} = (-1)^{m+n}$ es oscilante.

La sucesión $s_{mn} = (-1)^n$ es oscilante.

La sucesión $s_{mn} = \frac{m}{m+n}$ es oscilante. Sin embargo, se tiene:

$$\lim_{m\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{m}{m+n}\right) = 0$$

2. SERIES DOBLES

Llamamos *serie doble* al símbolo:

$$\sum_{(m,n)=(1,1)}^{\infty} u_{mn} = u_{11} + u_{12} + \ldots + u_{1n} + \ldots$$
$$+ u_{21} + u_{22} + \ldots + u_{2n} + \ldots$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ u_{m1} + u_{m2} + \ldots + u_{mn} + \ldots$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

con lo cual representamos la sucesión s_{mn} de sus sumas parciales:

$$s_{mn} = u_{11} + u_{12} + \ldots + u_{1n} +$$
$$+ u_{21} + u_{22} + \ldots + u_{2n} +$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ u_{m1} + u_{m2} + \ldots + u_{mn} +$$

Si la sucesión s_{mn} es convergente, su límite $\lim_{(m,n)\to\infty} s_{mn} = s$, se llama *suma de la serie.*

Como:

$$u_{mn} = s_{m,n} - s_{m-1,n} - s_{m,n-1} + s_{m-1,n-1}$$

se deduce que si s_{mn} converge, dado $\varepsilon > 0$ se puede encontrar N, de modo que para $n > N$, $m > N$, es $|u_{mn}| < \varepsilon$; lo cual no implica, naturalmente, que u_{mn} tienda a cero cuando m y n tienden a infinito separadamente.

El *criterio general de convergencia* consiste simplemente en que la suma de

términos, cuyos índices están comprendidos entre (m, n) y (p, q), se puede hacer menor que un número prefijado $\varepsilon > 0$, tomando un número N convenientemente y siendo $p > m > N$, $q > n > N$.

La demostración es análoga a la de las sucesiones simples y puede hacerla como ejercicio el lector.

Con los términos u_{mn} de una serie doble se pueden formar series simples de infinidad de maneras:

1.° Se puede sumar por diagonales:

$$u_{11} + u_{12} + u_{21} + u_{13} + u_{22} + u_{31} + \dots$$

2.° Por cuadrados:

$$u_{11} + u_{22} + u_{12} + u_{31} + u_{13} + u_{23} + u_{33} + u_{32} + u_{31} + \dots, \text{etc.}$$

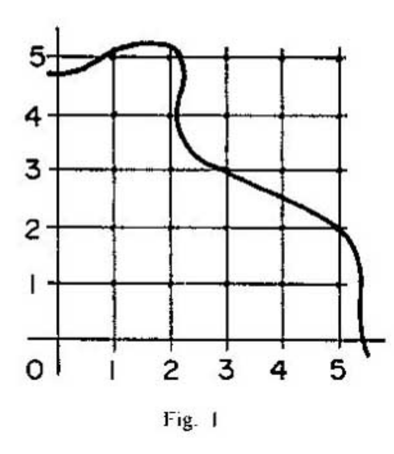


Fig. 1

En general, si suponemos los términos colocados en un retículo de un plano cartesiano (fig. 1) ocupando el término u_{mn} el punto de coordenadas (m, n) se puede considerar una curva Γ cualquiera, toda ella situada a distancia finita del origen y que determine un recinto con los semiejes $+ox$, $+oy$ y tomar las curvas Γ_k homotéticas de ésta respecto a 0 en una razón $k = 1, 2, 3, \dots$ Tomaremos entonces al considerar una curva Γ_k los puntos interiores al recinto que ella limita y que no son interiores al Γ_{k-1}.

3. TEOREMA

Toda serie simple formada con todos o algunos términos de una serie doble convergente de términos positivos es convergente. Si en la serie simple figuran todos los términos de la serie doble, su suma es la misma de ésta. La suma σ_k de los k primeros términos de la serie simple considerada, es inferior a S_{mn}, si tomamos m y n bastante grandes para que todos los términos de σ_k figuren en S_{mn}. Si es S la suma de la serie doble, resulta que cualquiera que sea k es $\sigma_k < S$: luego la serie simple es convergente.

En particular, si en la serie simple figuran todos los términos de la serie doble, dada una suma cualquiera $S_{\mu\nu}$, se puede encontrar una suma σ_p, tal que

en ella figuren todos los términos de aquella y, por tanto, sea: $S_{\mu\nu} \leqslant \sigma_j$, y en virtud de lo anterior, se puede encontrar otra suma S_{mn}, tal que:

$$S_{\mu\nu} \leqslant \sigma_j \leqslant S_{mn}$$

Como μ, ν son arbitrariamente grandes, resulta:

$$\lim_{j \to \infty} \sigma_j = \lim_{(\mu, \nu) \to \infty} S_{\mu\nu}$$

4. TEOREMA

Se puede sumar una serie doble convergente de términos positivos por filas (columnas). Es decir, la serie simple formada con las sumas de las series simples que constituyen las filas (columnas) de una serie convergente de términos positivos, es convergente y tiene la misma suma de la serie doble.

Pongamos:

$$u_{11} + u_{12} + \dots + u_{1n} + \dots = \lim_{n \to \infty} S_n^{(1)} = S^{(1)}$$

$$u_{21} + u_{22} + \dots + u_{2n} + \dots = \lim_{n \to \infty} S_n^{(2)} = S^{(2)}$$

....

....

$$u_{m1} + u_{m2} + \dots + u_{mn} + \dots = \lim_{n \to \infty} S_n^{(m)} = S^{(m)}$$

....

Vamos a probar que:

$$\lim_{m \to \infty} (S^{(1)} + S^{(2)} + \dots + S^{(m)}) = S$$

Dado ε se puede determinar N, de modo que $| S - S_{\mu\nu} | < \varepsilon$, siendo $\mu > N$, $\nu > N$. Desde luego será:

$$| S - (S^{(1)} + S^{(2)} + \dots + S^{(\mu)}) | < \varepsilon$$

es decir,

$$\lim_{n \to \infty} (S^{(1)} + S^{(2)} + \dots + S^{(\mu)}) = S$$

Análogamente se demuestra el recíproco, que es de gran utilidad en las aplicaciones:

Si son convergentes las series simples que forman las filas (columnas) de una serie doble y también es convergente la serie formada con sus sumas, la serie doble es convergente y su suma es igual a la de aquella.

La convergencia absoluta se define como en las series simples: la serie $\sum_{(m,n)} u_{mn}$ se dice *absolutamente convergente*, si es convergente la serie:

$$\sum_{(m,n)} |u_{mn}|$$

El teorema de la convergencia absoluta, se generaliza inmediatamente a las series dobles demostrándose que *una serie doble absolutamente convergente, se puede sumar por filas, por columnas, por diagonales, etc., obteniéndose siempre como suma la de la serie doble.*

CAPITULO **13**

Operaciones con series

1. SUMA DE SERIES

Si se suman término a término dos series convergentes:

[1] $$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

[2] $$b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots$$

se obtiene una serie:

[3] $$(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \ldots + (a_n + b_n) + \ldots$$

que es convergente. También es convergente la serie:

[4] $$a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + \ldots + a_n + b_n + \ldots$$

Si llamamos A_n a la suma de los n primeros términos de la [1] y B_n a la suma de los n primeros términos de la [2], la suma de los n primeros términos de la [3] es $A_n + B_n$ y tenemos:

$$\lim_{n\to\infty} (A_n + B_n) = \lim_{n\to\infty} A_n + \lim_{n\to\infty} B_n = A + B.$$

Para la serie [4] las sumas de $2n$ términos son las mismas anteriores y las de $2n + 1$ términos son:

$$A_n + B_n + a_{n+1} \to A + B.$$

Es interesante observar que la suma de dos series divergentes puede ser convergente. Por ejemplo:

$$(1 + 1 + \ldots + 1 + \ldots) + (-1 - 1 - \ldots - 1 \ldots) = 0 + 0 + \ldots + 0 + \ldots$$

También la suma de dos series oscilantes *puede* ser convergente:

$$(1 - 1 + 1 - 1 + \ldots) + (-1 + 1 - 1 + 1 \ldots) = 0 + 0 + 0 + 0 + \ldots$$

Para restar dos series basta multiplicar la serie sustraendo por -1.

EJEMPLOS:

1) La suma de las series.

[1] $$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots \quad = \ln 2$$

[2] $$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots \quad \text{divergente}$$

nos da la serie

$$1 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \ldots \quad \text{divergente}$$

2) La suma de la serie [1] con la

[3] $$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots \quad = 2$$

nos da la serie:

$$1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \ldots \quad = \ln 2 + 2$$

2. PRODUCTO DE SERIES

Sean dos series absolutamente convergentes de sumas V y W:

$$V = \sum_1^\infty v_n \qquad\qquad W = \sum_1^\infty w_n$$

La serie doble obtenida, poniendo $u_{m,n} = v_m w_n$ converge absolutamente, ya que sumada por filas, da:

$$\sum_{m=1}^\infty \left[\sum_{n=1}^\infty |v_m w_n|\right] = \sum_{m=1}^\infty \left[|v_m| \sum_{n=1}^\infty |w_m|\right] = \left[\sum_{m=1}^\infty |v_m|\right]\left[\sum_{n=1}^\infty |w_n|\right]$$

Podemos sumar la serie $\sum_{m,n} v_m w_m$ por diagonales, obteniéndose la *regla de Cauchy:*

$$VW = \sum_{k=1}^\infty (v_k w_1 + v_{k-1} w_2 + \ldots + v_1 w_k)$$

Podemos, pues, enunciar el siguiente teorema:

Si las series $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = V$ y $\sum_{n=1}^{\infty} w_n = W$ *son convergentes absolutamente, también es absolutamente convergente la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *y tiene como suma* $U = V.\ W.$

Algo más general que el anterior teorema es el siguiente, cuya demostración omitimos.

TEOREMA DE MERTENS. *Si una al menos de las dos series convergentes* $\Sigma\, v_n = V$, $\Sigma\, w_n = W$ *es absolutamente convergente, es* $\Sigma\, u_n$ *convergente y tiene como suma* $U = V.\ W.$

EJEMPLOS:

1. Como la serie $\Sigma\, x^n = \dfrac{1}{1-x}$ es absolutamente convergente si $|x| < 1$, tendremos, por el teorema de Cauchy,

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, x^n$$

2. Probar que

$$\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots\right)^2 = 2\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{5}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \dots\right]$$

3. APLICACION DE LAS SERIES DOBLES A LA SUMACION DE SERIES

Veamos un ejemplo:

Sea:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$$

Formemos el cuadro:

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

$$\frac{1}{2} = 0 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

$$\frac{1}{4} = 0 + 0 + \frac{1}{8} + \dots$$

....

....

Sumando por columnas aparece la serie propuesta, y sumando por filas, se obtiene:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots = 2$$

EJEMPLO:

Sea $\Sigma a_n = s$ una serie absolutamente convergente, probar que:

$$\Sigma \frac{a_0 + 2\, a_1 + 4\, a_2 + \ldots + 2^n\, a_n}{2^{n+1}} = s$$

(Es una generalización del anterior).

EJERCICIOS

1. Explicar la siguiente paradoja:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \ldots -$$

$$- 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \ldots\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots\right) = 0$$

2. Multiplicar las series $\Sigma \frac{x^n}{n!}$ y $\Sigma (-1)^n \frac{x^n}{n!}$

3. Probar que si $s_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$ es

$$(\Sigma\, a_n\, x^n) : (1 - x) = (\Sigma\, a_n\, x^n)\,(1 + x + x^2 + \ldots) = \Sigma\, s_n\, x^n$$

CAPITULO **14**

Sucesiones y series de términos complejos

1. SUCESION DE NUMEROS COMPLEJOS

Sucesión de números complejos es todo conjunto de números complejos en correspondencia biunívoca con la sucesión de los números naturales.

Escribiremos:

[1] $$a_1 + ib_1,\ a_2 + ib_2,\ \ldots,\ a_n + ib_n,\ \ldots$$

o abreviadamente:

[1'] $$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n,\ \ldots$$

EJEMPLO:

$$\frac{1}{2} + i\frac{1}{3},\ \frac{1}{2^2} + i\frac{1}{3^2},\ \ldots,\ \frac{1}{2^n} + i\frac{1}{3^n},\ \ldots$$

Se dice que la sucesión [1] tiene como límite $\alpha = a + ib$, si dado $\varepsilon > 0$, arbitrariamente pequeño, desde un valor de n en adelante es:

$$|\alpha_n - \alpha| < \varepsilon, \text{ o sea } \sqrt{(a - a_n)^2 + (b - b_n)^2} < \varepsilon$$

Como es:

$$|a_n - a| < |\alpha_n - \alpha| < \varepsilon$$
$$|b_n - b| < |\alpha_n - \alpha| < \varepsilon$$

resulta que lim $a_n = a$, lim $b_n = b$. Es decir, si existe lim $\alpha_n = \alpha$ existen los límites de las partes reales y de las partes imaginarias de los α_n.

Recíprocamente, si existen $lim\ a_n = a$, $lim\ b_n = b$, desde un valor de n, será $| a_n - a | < \varepsilon$, $| b_n - b | < \varepsilon$, luego:

$$\sqrt{(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2} < \sqrt{\varepsilon^2 + \varepsilon^2} = \varepsilon \sqrt{2}$$

es decir, es $lim\ (a_n + ib_n) = a + ib$.

EJEMPLOS:

$$1) \quad \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n} + i \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right) = \lim \frac{1}{n} + i \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 0 + i\,e$$

Una sucesión que no tiene límite se llama *divergente*. En particular: la sucesión a_n se dice *divergente* o que tiene *límite infinito*, si dado un número $K > 0$ tan grande como se quiera, desde un valor de n en adelante:

$$| a_n | > K$$

La sucesión $1 + in$ es divergente, ya que:

$$| 1 + in | = \sqrt{1 + n^2} \to \infty$$

Una sucesión se dice *oscilante* si no es convergente ni simplemente divergente, es decir, no tiene límite finito ni infinito.

Es oscilante la sucesión:

$$1,\ i,\ -1,\ -i,\ 1,\ \dots$$

Las propiedades que se utilizan para el cálculo de límites de sucesiones de términos reales se trasladan fácilmente a las de términos complejos, como puede comprobar el lector.

2. SERIES DE TERMINOS COMPLEJOS

Si los términos de una serie son números complejos, es decir:

[1] $$(p_1 + iq_1) + (p_2 + iq_2) + \dots + (p_n + iq_n) + \dots$$

y llamamos [2] $P_n + iQ_n$ a la suma de los n primeros términos, diremos que la serie [1] es *convergente*, *divergente* u *oscilante* según cual sea el carácter de la sucesión de sus sumas parciales.

De lo visto en el estudio de las sucesiones resulta que *la condición necesaria y suficiente para que sea convergente la serie* [1] *es que lo sean las series:*

[3] $p_1 + p_2 + \ldots + p_n + \ldots$ y [4] $q_1 + q_2 + \ldots + q_n + \ldots$

y si son P *y* Q *las sumas de éstas, la suma de aquella es* $P + iQ$.

Si una, al menos, de las dos series es divergente lo es la serie dada, ya que:

$$|P_n + iQ_n| = \sqrt{P_n^2 + Q_n^2}$$

es mayor que $|P_n|$ y que $|Q_n|$. La serie [1] se dice *absolutamente convergente*, si es convergente la serie:

$$\sum_1^\infty |p_n + iq_n|$$

Si una serie es absolutamente convergente, es convergente, pues, como:

$$|p_n| \leqslant |p_n + iq_n| \qquad \text{y} \qquad |q_n| \leqslant |p_n + iq_n|$$

resulta que son convergentes Σp_n y Σq_n, luego también la [1]. En este caso, las series Σp_n y Σq_n se pueden reordenar obteniéndose siempre series convergentes y con la misma suma que las de partida. Es decir, resulta así que en las series absolutamente convergentes se puede alterar el orden de los términos, es decir, son *incondicionalmente convergentes*.

Si la serie [1] es convergente, pero no absolutamente convergente, no pueden ser absolutamente convergentes las dos series [3] y [4]. Entonces al alterar el orden de los términos de la [1] se altera el de las [3] y [4] y puede obtenerse una serie no convergente.

Tenemos así, en resumen, el

TEOREMA DE DIRICHLET: *La suma de una serie absolutamente convergente de términos complejos no varía reordenando de cualquier modo sus términos: puede variar en las no absolutamente convergentes.*

El estudio de la convergencia ordinaria de las series de términos complejos se hace estudiando separadamente la de las partes reales y la de las partes imaginarias. El estudio de la convergencia absoluta se reduce a aplicar a la serie de valores absolutos de los términos, los criterios de series de términos positivos.

EJEMPLOS:

1) La serie:

$$S = \frac{i}{1} + \frac{i^2}{2} + \frac{i^3}{3} + \ldots = \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \ldots\right) + i\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \ldots\right)$$

es convergente por serlo cada una de estas dos series. No es absolutamente convergente, por ser divergente la serie

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$$

2) La serie

$$\frac{2+i}{3} - \frac{(2+i)^2}{3^2} + \frac{(2+i)^3}{3^3} - \ldots$$

es absolutamente convergente por ser convergente

$$\frac{\sqrt{5}}{3} + \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^3 + \ldots$$

EJERCICIOS

1. Estudiar la convergencia absoluta de las series:

$$\frac{i}{1 \cdot 2} + \frac{i^2}{2 \cdot 3} + \frac{i^3}{3 \cdot 4} + \ldots$$

$$\frac{a+ib}{1^2} - \frac{(a+ib)^2}{2^2} + \frac{(a+ib)^3}{3^2} - \ldots$$

2. Idem de la serie

$$\sum_1^\infty \left(\frac{1}{n} + (-1)^{n+1}\frac{i}{n^2}\right)$$

3. Estudiar para qué valores complejos de z convergen las series:

$$\Sigma \frac{z^n}{n}, \qquad \Sigma \frac{z^n}{n!} \qquad \Sigma \left(\frac{z}{1+z}\right)^n$$

CAPITULO **15**

Funciones

1. DEFINICIONES

Dados dos conjuntos A, B, una aplicación de A en B es una correspondencia, que asigna a cada elemento x de A un único elemento y de B.

Conviene distinguir tres elementos que intervienen en este concepto:

1.° El conjunto A de *definición* o *dominio*, o *conjunto inicial*, cuyos elementos los representamos por x *(variable* o *argumento)*.

2.° El conjunto B de *valores, contradominio* o *conjunto final*, cuyos elementos los designamos por y *(valor* o *imagen)*.

3.° La *correspondencia* definida entre ambos, que es la que representamos por un símbolo como f, T, etc.

Escribimos abreviadamente:

$$x \rightarrow y = f(x)$$

que se lee: x da $y = f(x)$, o bien y es función de x.

Se suele reservar el nombre de *función* para el caso en que ambos conjuntos sean números. Cuando los conjuntos A y B son subconjuntos del cuerpo R de los números reales la aplicación se dice que es una *función real de variable real.*

Si tenemos *dos aplicaciones* f, g de A en B y para *todo* elemento $x \in A$ es $f(x) = g(x)$ se dice que f y g son *iguales.*

Si *todo* elemento de B es transformado de alguno de A, diremos que se trata de una *aplicación de A sobre B (también se dice aplicación sobreyectiva).*

Una aplicación en que a dos elementos distintos de A corresponden dos elementos distintos de B, se llama *inyectiva.* Una aplicación $y = f(x)$ que es a la vez inyectiva y sobreyectiva se llama *biyectiva* o *biunívoca* y tiene sentido hablar de la *aplicación inversa* que hace corresponder al elemento $y = f(x)$ el $x = f^{-1}(y)$.

2. GRAFICA DE UNA FUNCION

Sea f una aplicación del conjunto A en el B. El conjunto de pares $(x, f(x))$ en que $x \in A$ es un subconjunto del conjunto $A \times B$ y se llama *gráfica* de la función f.

Si se adopta la representación cartesiana y A es un intervalo de números reales, tenemos la representación gráfica ordinaria de las funciones reales de variable real. *Por ejemplo*, en la figura está representado el conjunto $A(1 < x < 2)$, el $B(1 < x^2 < 4)$ el $A \times B$ y la gráfica (x, x^2) para $x \in A$.

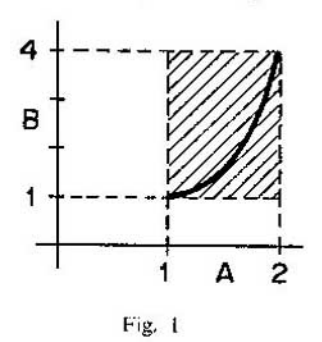


Fig. 1

El conjunto de los elementos $x \in A$, que tiene como imagen un elemento $y \in B$ se denomina *imagen inversa* de y y se denota $f^{-1}(y)$. Si tal conjunto contiene más de un elemento no es una aplicación en el sentido definido. Sólo en el caso de que tal conjunto se reduzca a un punto se habla, según hemos dicho, de *función* o *aplicación inversa*.

Si definimos $y = x^2$, la *imagen inversa* asigna a cada y dos puntos de abscisas $+\sqrt{y}$, $-\sqrt{y}$. No se puede hablar de función inversa. En cambio, $y = x^3$ tiene como función inversa $x = \sqrt[3]{y}$.

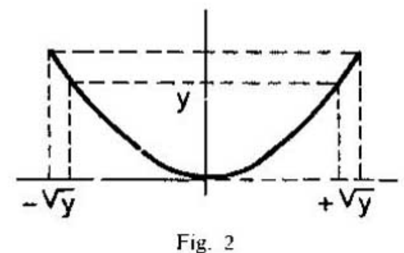


Fig. 2

3. PRODUCTO DE APLICACIONES O APLICACION COMPUESTA

Sean A, B, C tres conjuntos dados y sea f una aplicación de A en B, y g una aplicación de B en C. A todo elemento $x \in A$ le corresponde un elemento $y = f(x) \in B$, y a este y le corresponde un elemento $z = g(y) \in C$. La aplicación de A en C está definida por la relación:

$$x \to g[f(x)]$$

y se llama *aplicación compuesta* de f con g o *producto* de f por g y se denota también:

$$g * f$$

Este producto no es en general *conmutativo*, pues puede ocurrir que incluso g no esté definido en A y no tenga sentido $f * g$.

El producto de aplicaciones es *asociativo*, pues es inmediato ver que:

$$h * (g * f) = (h * g) * f$$

Se llama *aplicación idéntica* de A, a la que transforma todo punto de A en sí mismo. Se la designa por el símbolo I y se escribe:

$$I * f = f * I = f$$

Sea f una aplicación biunívoca de A sobre B, y f^{-1} una aplicación biunívoca de B sobre A. Entonces $f^{-1} * f$ es la aplicación idéntica de A y $f * f^{-1}$ es la aplicación idéntica de B.

Sea f una aplicación biunívoca de A sobre B y g una aplicación biunívoca de B sobre C, entonces $g * f$ es una aplicación biunívoca de A sobre C y se tiene:

$$(g * f)^{-1} = f^{-1} * g^{-1}$$

4. PROPIEDADES

Sea f una aplicación de A en B y sea $f(A)$ el conjunto de los puntos imágenes de los puntos de A. Tenemos las siguientes propiedades:

a) *Si* $C \subset A$ *es* $f(C) \subset f(A)$

Sea $y \in f(C)$, existe al menos un x tal que $f(x) = y$; pero como $C \subset A$ resulta $x \in C$ implica $x \in A$, luego $f(x) = y \in f(A)$.

Análogamente se demuestra:

b) $$f(C \cup D) = f(C) \cup f(D)$$

c) $$f(C \cap D) \subset f(C) \cap f(D)$$

Si la aplicación es inyectiva:

d) $$f(C \cap D) = f(C) \cap f(D)$$

5. FUNCIONES RACIONALES ENTERAS

Sometiendo a la variable x y a constantes a las únicas operaciones de sumar, restar y multiplicar, se obtienen las *funciones racionales enteras o polinomios*:

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

A este tipo pertenecen la *función lineal*, cuyo diagrama cartesiano es una recta, y la *función cuadrática* o polinomio de segundo grado:

$$y = ax^2 + bx + c$$

cuyo diagrama cartesiano es una parábola.

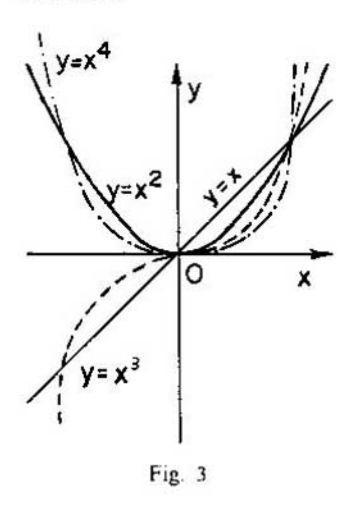


Fig. 3

En la figura se representan gráficamente las funciones:

$$y = x,\ y = x^2,\ y = x^3,\ y = x^4$$

Teniendo dibujadas éstas, se puede fácilmente construir el diagrama cartesiano de otros polinomios.

Si designamos una de estas funciones en que el exponente es par por $y = f(x)$, la curva es simétrica respecto del eje OY, ya que se verifica:

$$f(-x) = f(x)$$

Tales funciones se llaman *pares*.

Si el exponente es impar, se tiene:

$$f(-x) = -f(x)$$

y la curva es simétrica respecto del origen. Tales funciones se llaman *impares.*

6. FUNCIONES RACIONALES E IRRACIONALES

Las *funciones racionales* son de la forma general siguiente:

$$y = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_mx^m}{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n}. \quad \begin{matrix}(c_m \neq 0)\\(a_n \neq 0)\end{matrix} \qquad [1]$$

La más sencilla es la función lineal racional:

$$y = \frac{a + bx}{c + dx}, \qquad \text{con} \quad d \neq 0$$

En ellas la variable sólo está sometida a las operaciones *racionales:* suma, resta, multiplicación y división.

Los valores de x para las cuales el numerador de [1] se anula y no se anula el denominador, se llaman *ceros* de la función; los valores de x en que se anula el denominador y no el numerador, se denominan *polos*, y en su proximidad, el valor absoluto de la función toma valores tan grandes como queramos.

En los puntos x_0, en que se anulan numerador y denominador, dividiendo por $x - x_0$ ambos polinomios, se tendrá uno de los casos anteriores, o bien, se anularán ambos y volveremos a simplificar.

Cuando la variable figura bajo algún radical, la función se llama *irracional.*

En el caso de índice par, la variable sólo puede tomar los valores que hagan positivas a las cantidades subradicales.

7. FUNCIONES ALGEBRAICAS Y TRASCENDENTES

Las funciones racionales y las irracionales forman las funciones algebraicas; luego:

Función algebraica es aquella en que la variable sólo está sometida a las operaciones algebraicas: adición, sustracción, multiplicación, división y radicación.

Las restantes funciones, exponencial, logarítmica, etc., que estudiamos a continuación se llaman *trascendentes.*

EJEMPLO:

Son algebraicas las siguientes funciones:

$$y = 5\sqrt{\frac{x-1}{x^2+1}} - \frac{3 \log 2}{x+7} \qquad y = e^4 x^2 + (5 \operatorname{sen} 3)\, x + \log 6$$

y trascendentes:

$$y = x^2 \cdot \log x, \qquad y = xe^x - \frac{1}{x^2}$$

8. FUNCIONES EXPLICITAS E IMPLICITAS

Todas las funciones indicadas hasta ahora en este capítulo son de la forma:

$$y = f(x)$$

y se llaman funciones *explícitas.* En ellas, el valor de la función se obtiene efectuando con la variable x las operaciones correspondientes.

Al estudiar las cónicas, se encuentran ecuaciones como:

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0, \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \text{ etc.} \qquad [1]$$

es decir, de la forma:

$$\Phi(x, y) = 0$$

En ellas, dado un valor de la variable x, para obtener el valor o valores correspondientes de la función, es preciso resolver la ecuación en y que resulta. Por eso se dice que esta función y de x está dada en forma *implícita* por la ecuación:

$$\Phi(x, y) = 0 \qquad [2]$$

En los casos sencillos, es posible despejar la y de la ecuación [2], llegándose así a la expresión *explícita* de la función definida por [2].

Así ocurre, como es bien sabido, con las ecuaciones de las cónicas, en las

cuales resultan *dos* valores de y para cada valor de x. Su estudio se reduce al de *dos* funciones, según sabemos. A veces se las llama *funciones multiformes* o *multívocas.*

9. FUNCIONES INVERSAS

Sea la función:

$$y = f(x) \qquad [3]$$

Dando a x un valor x_1 (dentro de su campo de variabilidad), corresponderá un valor y_1 para la y. Si a este valor y_1 de y sólo corresponde el valor x_1 para x, es decir, si la ecuación en x:

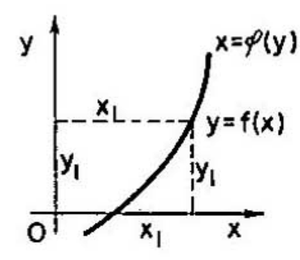
$$y_1 - f(x) = 0 \qquad [4]$$

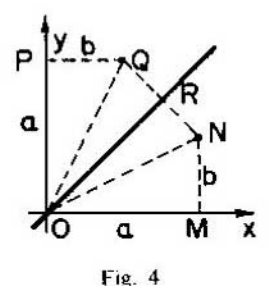
sólo se satisface para $x = x_1$, resulta x en función de y; si la designamos por $x = \phi(y)$ esta función se llama *función inversa o recíproca* de la $y = f(x)$.

Por tanto, se verificará:

$$f[\phi(y)] \equiv y \qquad [5]$$

Cuando al valor de y corresponden en [4] varios valores para x, la correspondencia inversa se reduce al estudio de varias funciones.





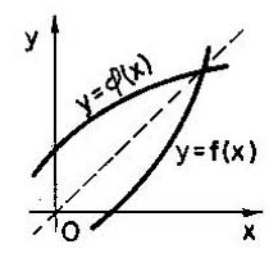


Fig. 4

En los casos elementales que nosotros estudiaremos, la función inversa podrá obtenerse despejando x en la ecuación [4].

Así, la función inversa de:

$$y = x^3 \qquad \text{es} \qquad x = \sqrt[3]{y}$$

y si este valor de x lo sustituimos en $y = x^3$, obtenemos la identidad [5]:

$$(\sqrt[3]{y})^3 \equiv y$$

De lo anterior se deduce que los pares de valores (x_1, y_1) así determinados, satisfacen a las dos ecuaciones.

$$y = f(x), \qquad x = \phi(y)$$

luego ambas representan la misma curva.

Generalmente se acostumbra a seguir representando por x la variable independiente de la función inversa, es decir, a considerar, no la función $x = \phi(y)$, sino la:

$$y = \phi(x) \tag{6}$$

Entonces, es claro que si (a, b) es un punto de la curva $x = \phi(y)$, el (b, a) lo será de la $y = \phi(x)$. Pero dichos puntos son simétricos respecto a la bisectriz del primer cuadrante.

10. FUNCION EXPONENCIAL

Se llama así a la función:

$$y = a^n, \qquad \text{con} \qquad a > 0$$

Recordemos que la función que se comienza definiendo para valores naturales de x como caso particular del producto:

$$a^n = a \cdot a \cdot a \overset{n}{\ldots} a$$

Después se define para el valor $x = 1$, y $x = 0$, así:

$$a^1 = a, \qquad a^0 = 1$$

y para valores enteros negativos:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a \cdot a \overset{n}{\ldots} a}$$

Del campo de los números enteros se pasa al de los racionales con estas definiciones:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \qquad a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$$

Por último, para valores irracionales de x, se aproxima x mediante las sucesiones monótonas convergentes de números racionales que lo definen; es decir, si x está definida por:

$$b_1 \leqslant b_2 \leqslant b_3 \leqslant \ldots \leqslant b_i \leqslant \ldots$$
$$b'_1 \geqslant b'_2 \geqslant b'_3 \geqslant \ldots \geqslant b'_i \geqslant \ldots$$

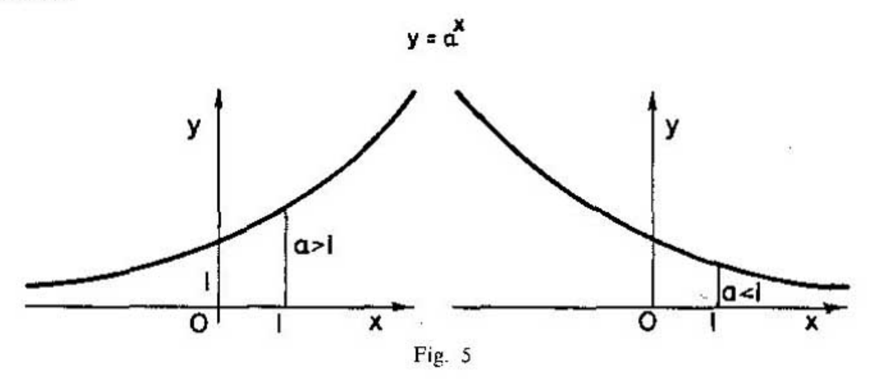


Fig. 5

a^x viene definida por las sucesiones monótonas convergentes:

$$a^{b_1} \leqslant a^{b_2} \leqslant a^{b_3} \leqslant \ldots \leqslant a^{b_i} \leqslant \ldots$$

$$a^{b'_1} \geqslant a^{b'_2} \geqslant a^{b'_3} \geqslant \ldots \geqslant a^{b'_1} \geqslant \ldots$$

si es $a > 1$; para $a < 1$, se cambia el sentido de las desigualdades.

La función exponencial:

$$y = a^x$$

que es trascendente, queda así definida para todo valor real de x y su ley de variación se ve claramente en las figuras. En la primera es $a = 3/2$ y en la segunda $a = 2/3$.

En el caso de ser $a = e$, la función:

$$y = e^x$$

se llama *exponencial natural*. Como es $e > 1$, su gráfica es del tipo de la figura, pero la parte situada en el primer cuadrante crece muy rápidamente.

EJEMPLO:

Son funciones exponenciales las

$$y = 2^x, \qquad y = 10^x, \qquad y = \left(\frac{1}{2}\right)^x, \qquad y = \left(\frac{1}{100}\right)^x$$

Representarlas eligiendo convenientemente las unidades de los ejes.

11. FUNCION LOGARITMICA

Es la:

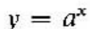
$$y = \log_a x \qquad \text{con} \qquad 0 < a \neq 1$$

y está definida para todo valor real positivo de x.

La igualdad anterior es equivalente a esta otra:

$$a^y = x$$

luego la función logarítmica es la inversa de la función exponencial. Por tanto, su gráfica será simétrica respecto a la bisectriz de los cuadrantes 1.º y 3.º, de la gráfica de la función exponencial:



$$y = a^x$$

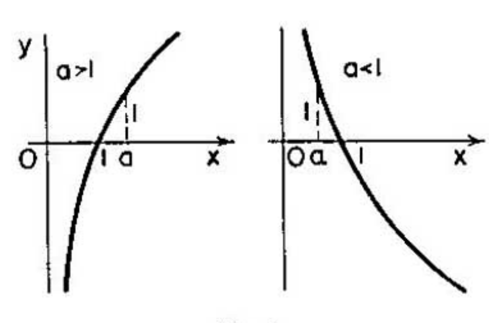


Fig. 6

Así, de la figura 5 se deduce sin dificultad la 6, que corresponden, respectivamente, a los valores $a = 3/2$ y $a = 2/3$.

En ellas se ven claramente la ley de variación de la función logarítmica.

Cuando la base es el número e, los logaritmos se llaman *naturales* o *neperianos*, según sabemos, y se representan así:

$$y = ln\ x$$

La gráfica del logaritmo natural es del tipo de la figura, puesto que es $e > 1$.

Se demuestra que en el cuerpo de los números reales R, el *grupo aditivo* R_A formado con todos los elementos de R y la adición como operación y el *grupo multiplicativo* R_M obtenido considerando los elementos positivos de R y la multiplicación como ley de composición son *isomorfos*. Los elementos neutros O, 1 se corresponden.

El isomorfismo se traduce por la propiedad fundamental:

$$\log_a (y_1 \cdot y_2) = \log_a y_1 + \log_a y_2$$

o bien:

$$a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1 + x_2}$$

EJEMPLO:

Son funciones logarítmicas las

$$y = \log_2 x, \qquad y = \log x, \qquad y = \log_{1/2} x, \qquad y = \log_{1/100} x.$$

El alumno hallará con facilidad sus diagramas cartesianos si obtuvo los del párrafo anterior.

12. FUNCION POTENCIAL

Es la:

$$y = x^a,$$

donde a es un número real cualquiera.

Ya la hemos estudiado anteriormente en algunos casos particulares, suponiendo a natural:

$$y = x, \qquad y = x^2, \qquad y = x^3, \qquad \ldots$$

o entero negativo:

$$y = \frac{1}{x}, \qquad y = \frac{1}{x^3}, \qquad y = \frac{1}{x^2}, \ldots$$

o racional:

$$y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}, \qquad y = x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}, \qquad y = x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}, \ldots$$

En el caso general de ser a un número real cualquiera, la relación evidente:

$$x^a = (e^{\ln x})^a = e^{a \cdot \ln x}$$

reduce el estudio de la función potencial al de las dos estudiadas precedentemente, y como $\ln x$ solamente está definida para $x > 0$, lo mismo ocurre, en general, con la función potencial.

En algunos casos especiales, según ya vimos, la función está definida para todo valor real de x. En el caso de exponente positivo, entero o racional de denominador impar $\frac{m}{2n + 1}$, el campo de definición de la función es $(-\infty, +\infty)$.

Si en las mismas hipótesis, el exponente es negativo, hay que excluir del campo de definición el punto $x = 0$. En la figura 1 están representados algunos de estos tipos.

EJEMPLO:

La función potencial

$$y = x^{\sqrt{2}}$$

sólo está definida para $x > 0$. Puede representarse gráficamente con buena aproximación, teniendo en cuenta que, verificándose

$$1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5,$$

es decir,

$$\frac{14}{10} < \sqrt{2} < \frac{15}{10}, \qquad \text{o sea,} \qquad \frac{7}{5} < \sqrt{2} < \frac{3}{2},$$

resultará

$$x^{\frac{7}{5}} < x^{\sqrt{2}} < x^{\frac{3}{2}}, \qquad \text{es decir,} \qquad \sqrt[5]{x^7} < x^{\sqrt{2}} < \sqrt{x^3}$$

para $x > 1$, y limitaciones de sentido contrario para $0 \leq x < 1$.

Luego, haciendo los diagramas cartesianos de cualquiera de las funciones

$$y = \sqrt[5]{x^7}, \qquad y = \sqrt{x^3}$$

se tienen sendas curvas aproximadas de la $y = x^{\sqrt{2}}$. La semisuma de las ordenadas de ambas daría mejor aproximación.

13. FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

Las funciones trigonométricas:

$$y = \text{sen } x, \qquad y = \cos x, \qquad y = \text{tg } x, \qquad y = \text{ctg } x$$

de un ángulo de medida x en radianes, se definen geométricamente en la forma bien conocida, que recuerda la figura 7. En esta misma se ve que si aumenta el ángulo x en 2π, se tiene:

$$\text{sen } (x + 2\pi) = \text{sen } x$$
$$\cos (x + 2\pi) = \cos x$$

y si se aumenta en π, se verifica:

$$\text{tg } (x + \pi) = \text{tg } x$$
$$\text{ctg } (x + \pi) = \text{ctg } x$$

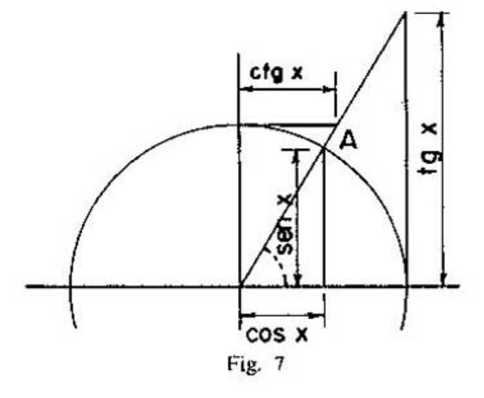


Fig. 7

Esto se expresa diciendo que las funciones seno y coseno son *periódicas*, de período 2π, y las funciones tangente y cotangente son también periódicas de período π.

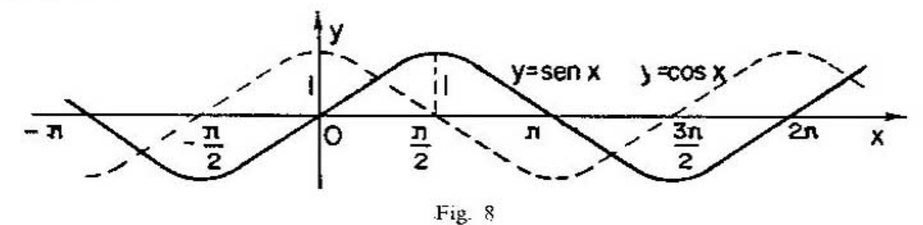


Fig. 8

En general, una función:

$$y = f(x)$$

se dice que tiene el *período* T, si es:

$$f(x + T) = f(x)$$

cualquiera que sea x.

La representación gráfica de las funciones trigonométricas fundamentales se encuentra en las figuras. En ellas se ve claramente la propiedad de periodicidad.

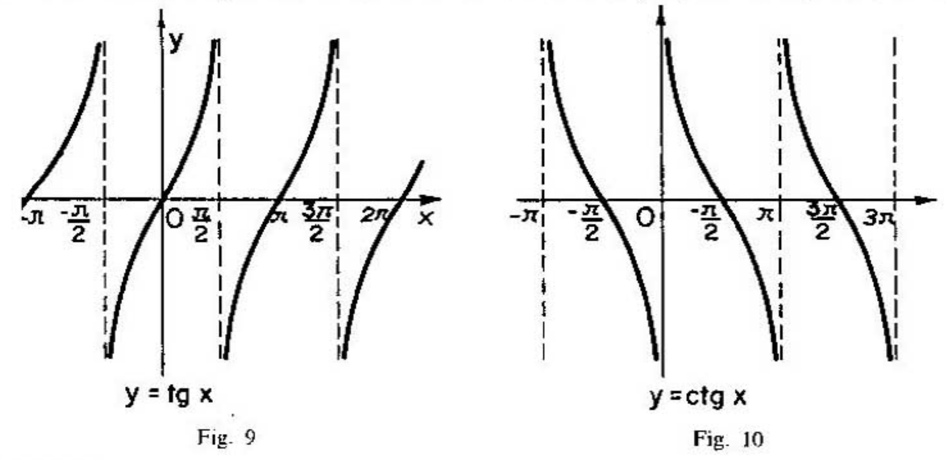


Fig. 9

Fig. 10

EJEMPLO:

La función

$$y = 2 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x$$

es el período 2π; en cambio, la

$$y = \operatorname{sen} 2x$$

tiene π por período, puesto que

$$\operatorname{sen} 2(x + \pi) = \operatorname{sen}(2x + 2\pi) = \operatorname{sen} 2x.$$

14. FUNCIONES CICLOMETRICAS

Se llaman así las funciones *inversas de las trigonométricas.*

1. FUNCION ARC SEN x.—Dado un número x no superior a 1 en valor absoluto, hay infinitos arcos cuyo seno es x. Si uno de ellos es y, es decir, si:

$$\text{sen } y = x,$$

sabemos que todos los arcos de la forma $y \pm 2k\pi$, también tienen como seno x, puesto que:

$$\text{sen } (y \pm 2k\pi) = x.$$

Tal correspondencia es multiforme de orden infinito, es decir, *infinitiforme.*

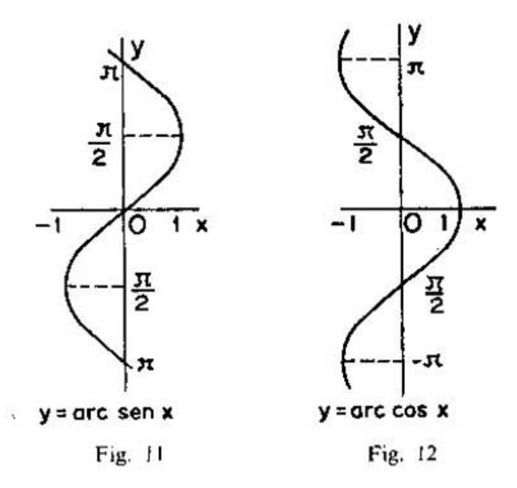


Fig. 11 Fig. 12

Se define la función inversa eligiendo entre todos los arcos y cuyo seno es x, el que está comprendido entre $-\frac{\pi}{2}$ y $+\frac{\pi}{2}$, designándose esta función por la notación:

$$y = \text{arc sen } x \qquad [7]$$

Por tanto, la igualdad [7] lleva consigo esta acotación:

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}, \qquad [8]$$

que omitiremos en muchos casos, pero que no debe olvidarse.

En la figura 11 está dibujada, en trazo grueso, la parte de la curva que se considera como función arc sen x.

II. FUNCION ARC COS x.—Análogamente, resulta la función inversa del:

$$y = \text{arc cos } x \qquad 0 \leqslant y \leqslant \pi \qquad [9]$$

cuya gráfica aparece en la figura 12.

III. FUNCION ARC TG x.—Dado un número x cualquiera, sabemos que hay infinitos arcos cuya tangente es x, todos los cuales están contenidos en la expresión:

$$y \pm k\pi$$

si es $\operatorname{tg} y = x$.

Igual que en el caso del seno, entre esos infinitos arcos se elige el comprendido entre $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$, resultando la función:

$$y = \text{arc tg } x \qquad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \qquad [10]$$

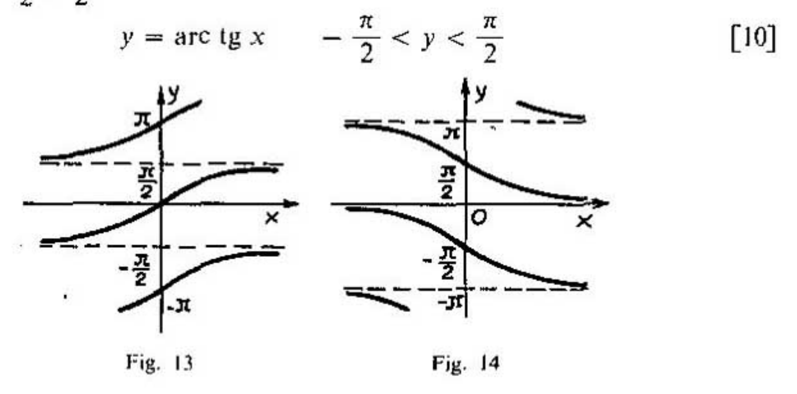


Fig. 13 Fig. 14

Véase en la figura 13 la parte de curva que representa a la función $y = \text{arc tg } x$, así definida. Está marcada en trazo grueso.

IV. FUNCION ARC CTG x.—De igual forma se obtiene la función inversa de la cotangente:

$$y = \text{arc ctg } x \qquad 0 < y < \pi, \qquad [11]$$

cuya gráfica aparece en la figura 14.

EJEMPLOS:

1. La función

$$y = \text{sen (arc cos } x)$$

es transcendente en apariencia, pues haciendo $\text{arc cos } x = u$, de donde $\cos u = x$, es $\text{sen } u = \sqrt{1 - \cos^2 u} = \sqrt{1 - x^2}$, y queda la función irracional

$$y = \text{sen } u = \sqrt{1 - x^2}.$$

2. Una ecuación de la forma

$$\text{arc tg } a + \text{arc tg } x = \frac{\pi}{4}$$

se resuelve haciendo

$$\text{arc tg } a = u, \qquad \text{de donde} \qquad \text{tg } u = a$$
$$\text{arc tg } x = v, \qquad \text{»} \quad \text{»} \qquad \text{tg } v = x$$

Sustituyendo, queda

$$u + v = \frac{\pi}{4}, \qquad \text{luego} \qquad \text{tg }(u + v) = \frac{\text{tg } u + \text{tg } v}{1 - \text{tg } u \text{ tg } v} = \text{tg } \frac{\pi}{4} = 1.$$

y teniendo en cuenta los valores de tg u y tg v, se obtiene la ecuación

$$\frac{a + x}{1 - ax} = 1, \qquad \text{de donde se despeja} \qquad x = \frac{1 - a}{1 + a}$$

15. FUNCIONES HIPERBOLICAS

El empleo de las llamadas funciones hiperbólicas introduce en muchos cálculos una notable simplificación. La definición de las fundamentales seno y coseno, es:

$$sh\ x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad ch\ x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad [1]$$

Su gráfica se encuentra en la figura 15. Desde luego, se tiene:

$$ch\,(-x) = ch\ x, \qquad sh\,(-x) = -\,sh\ x$$

esto es, el coseno hiperbólico es una función par, y el seno, impar (*).

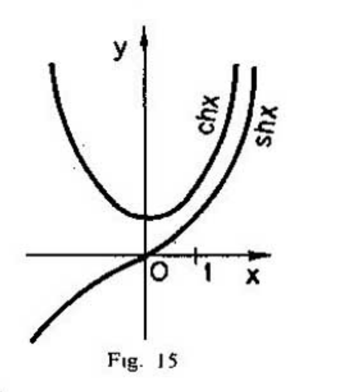


Fig. 15

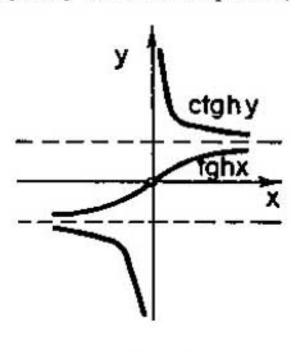


Fig. 16

(*) Excelentes tablas de funciones hiperbólicas son las de Hayashi.

De las [1] resulta inmediatamente:

$$ch^2\ x - sh^2\ x = 1 \qquad [2]$$

$$2ch\ x\ sh\ x = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = sh\ 2x \qquad [3]$$

$$ch^2\ x + sh^2\ x = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} = ch\ 2x \qquad [4]$$

$$sh\ x\ ch\ y \pm ch\ x\ sh\ y = sh\ (x \pm y) \qquad [5]$$

$$ch\ x\ ch\ y \pm sh\ x\ sh\ y = ch\ (x \pm y) \qquad [6]$$

También se tiene:

$$(ch\ x + sh\ x)^n = (e^x)^n = e^{nx} = ch\ nx + sh\ nx$$

y podemos escribir la siguiente fórmula:

$$(ch\ x \pm sh\ x)^n = ch\ nx \pm sh\ nx \qquad [7]$$

Definamos ahora las funciones tangente y cotangente hiperbólicas (fig. 16) por las fórmulas:

$$\text{tgh}\ x = \frac{\text{sh}\ x}{\text{ch}\ x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}; \qquad \text{ctgh}\ x = \frac{\text{ch}\ x}{\text{sh}\ x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \qquad [8]$$

Se demuestra con cálculos fáciles:

$$\text{tgh}\ (x \pm y) = \frac{\text{tgh}\ x \pm \text{tgh}\ y}{1 \pm \text{tgh}\ x\ \text{tgh}\ y} \qquad [9]$$

Más adelante se ve que las inversas de estas funciones coinciden con el área de un sector hiperbólico, y de aquí el nombre que se les dá: área o argumento cuyo coseno hiperbólico es x, área cuyo seno hiperbólico es x, etc.

Si ponemos $y = Arg\ ch\ x$, se tiene:

$$\frac{e^y + e^{-y}}{2} = x \qquad \therefore \qquad e^{2y} - 2xe^y + 1 = 0$$

de donde:

$$e^y = x \pm \sqrt{x^2 - 1}$$

luego,

$$Arg\ ch\ x = ln\ (x \pm \sqrt{x^2 - 1})$$

y análogamente,

$$Arg\ sh\ x = ln\ (x + \sqrt{x^2 + 1}) \qquad [10]$$

Como la función *sh* es monótona, la gráfica inversa es uniforme, y en el paréntesis tomamos el signo positivo, para que resulten valores positivos. En cambio, de la representación gráfica de la curva $y = ch\ x$, resulta que la inversa es biforme y está definida para $x \geqslant 1$. A un valor x corresponden dos valores de signos opuestos, como puede comprobarse en la figura, o bien teniendo en cuenta que:

$$ln\,(x + \sqrt{x^2 - 1}) + ln\,(x - \sqrt{x^2 - 1}) = 0$$

Del mismo modo, si es $y = \text{Arg tgh } x$, se tiene:

$$\frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = x \qquad \therefore \qquad e^y(1 - x) = e^{-y}(1 + x)$$

de donde:

$$e^{2y} = \frac{1 + x}{1 - x}$$

luego,

$$Arg\ tgh\ \ x = ln\ \sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}\ \text{en el intervalo}\ -1 < x < 1$$

$$Arg\ ctgh\ \ x = ln\ \sqrt{\frac{x + 1}{x - 1}}\ \text{en los intervalos}\ x < -1,\ x > 1$$

16. FUNCIONES ELEMENTALES

Las operaciones que a partir de la variable x permiten obtener las funciones racionales, irracionales y transcendentes, consideradas *(exponenciales, logarítmicas, trigonométricas y ciclométricas)*, se denominan *operaciones analíticas fundamentales.*

Toda función que se pueda obtener a partir de la variable y constantes, mediante un número finito de estas operaciones, se llama *función elemental.*

EJEMPLO:

Son funciones elementales las siguientes:

$$y = \sqrt{1 + \text{sen}^4 x + e^{2^x}}; \qquad y = e^{ax}; \qquad y = \text{sen}\,(\log x).$$

17. FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES. FUNCIONES VECTORIALES

El estudio de los fenómenos naturales es, en general, bastante complejo, y la variación de una magnitud depende generalmente de la variación de dos o más. Así, al estudiar la variación del volumen de una masa gaseosa, se observa que éste depende de la presión y la temperatura a que está sometida dicha masa. Si se supone la presión constante, el volumen depende de la temperatura y tenemos una función de una variable; pero el estudio más adecuado del fenómeno se hace considerando la variación simultánea de la presión y la temperatura.

En general, *toda correspondencia que nos defina para cada par de valores de las variables independientes* x, y, *un valor* z, *bien determinado, se dirá que es una función de las variables* x, y. *Es decir, es una aplicación de un subconjunto de* R^2 *en un subconjunto de* R.

Simbólicamente se representa en la forma:

$$z = F(x, y) \qquad [1]$$

y se lee «z es función de x e y». La notación anterior indica el conjunto de operaciones (aritméticas, geométricas, experimentales, etc.), que hay que realizar con las variables x, y para obtener el valor de z. Es decir, con el símbolo [1] podemos representar:

$$z = x^3y; \qquad z = x^2 + y^3; \text{ etc.}$$

o bien, z es el área de una elipse de semiejes x, y; o bien, z es el volumen que ocupa una cierta masa de hidrógeno a una temperatura x y presión y, o bien, z es el número de fallecidos en Madrid de edad x durante el año y, etc.

También aparecen en la teoría y en las aplicaciones funciones de más de dos variables. Por ejemplo:

$$z = x^2 + y^2 + u^2$$

$$z = x^2 - y^2 + ux^3$$

el volumen de un elipsoide depende de las longitudes de los tres semiejes, etc.

Se puede tener una idea intuitiva de una función de dos variables tabulándola en un cuadro de doble entrada.

EJEMPLO:

Para la función $z = x + 2y$ tenemos el cuadro siguiente:

y \ x	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	2	3	4	5	6
2	4	5	6	7	8
3	6	7	8	9	10

Partiendo de la tabla de una función, se realiza la representación gráfica de la misma en el espacio cartesiano sin más que representar los diversos puntos, cuyas ternas de coordenadas tenemos en la tabla. Estos puntos están situados en una superficie que constituye el *diagrama cartesiano de la función.*

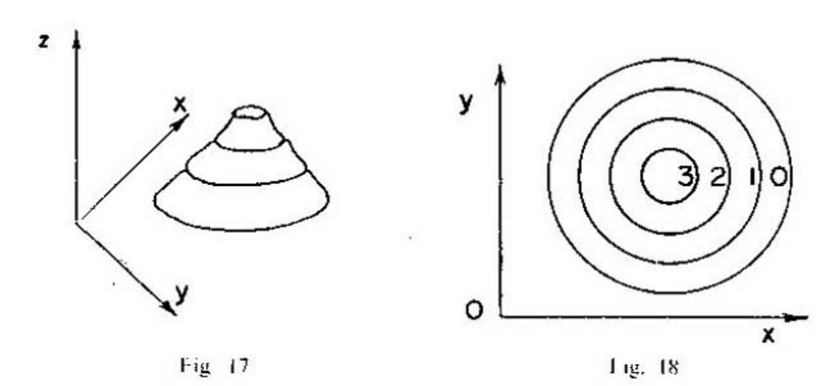


Fig. 17 Fig. 18

La representación puede limitarse a dibujar en el plano XY las curvas de nivel, indicando las respectivas cotas en forma análoga a como se representan en los planos topográficos o *planos acotados o mapas* las desigualdades del terreno.

La manera de tener una imagen intuitiva de la superficie representativa de la función $z = f(x, y)$ es representar algunas curvas de la misma, lo más sencillo

es representar las *curvas de nivel constante*, que son las que se obtienen al cortar las superficies por planos paralelos al plano XOY; para los cuales se verifica z = constante.

EJEMPLO:

Sea la función

$$z = x^2 + y^2$$

La intersección de la misma con el plano $z = 1$ es la circunferencia de ecuación:

$$x^2 + y^2 = 1$$

obtenida haciendo $z = 1$ en la ecuación de la superficie. Análogamente, el plano $z = 2$ nos da la circunferencia:

$$x^2 + y^2 = 2$$

el plano $z = 3$, la circunferencia:

$$x^2 + y^2 = 3, \text{ etc.}$$

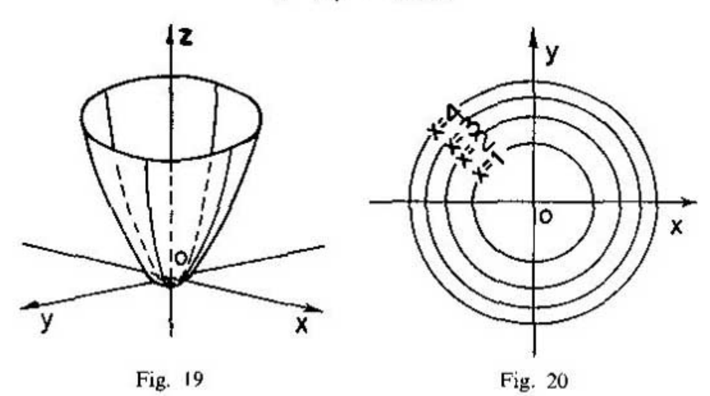


Fig. 19

Fig. 20

Estas circunferencias de radios crecientes con la cota, son las curvas de nivel constante de la superficie.

La intersección de la misma con el plano YOZ de ecuación $x = 0$ es una parábola, situada en dicho plano, cuya ecuación es:

$$z = y^2$$

La intersección con el plano $y = 0$ es una parábola situada en este plano cuya ecuación es:

$$z = x^2$$

Con estas observaciones tenemos ya una idea de la forma de esta superficie llamada *paraboloide de revolución*.

Análogamente, la ecuación $z = x^2 - y^2$ representa una superficie que, cortada por planos $z = k$, nos dá hipérbolas equiláteras:

$$x^2 - y^2 = k$$

se denomina *paraboloide hiperbólico.*

Un paso más en la ampliación del concepto de función real nos conduce a la *función vectorial de variable vectorial*, en que la variable es un punto de R^m y los «valores» de la función son puntos de R^k, es decir, se trata de una aplicación de un conjunto de R^m en un conjunto de R^k:

$$Y = f(X)$$

en que:

$$X = (x_1, \ldots, x_m) \in R^m \qquad \text{y} \qquad Y = (y_1, \ldots, y_k) \in R^k$$

De modo que se trata en realidad de k funciones reales de m variables:

$$y_1 = f_1(x_1, \ldots, x_m)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y_k = f_k(x_1, \ldots, x_m)$$

Por ejemplo:

$$y_1 = x_1^2 + 2x_2 + x_3$$
$$y_2 = x_1 + x_2^2 + x_1 x_3$$

es una función vectorial (y_1, y_2) de una variable vectorial (x_1, x_2, x_3).

EJERCICIOS

1. Determinar a para que la curva $y = x^3 + ax$ pase por el punto (1, 5) y dibujarla.

2. $y = \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x^3 + 1}$

Representar las funciones:

3. $y = \dfrac{5}{x^2}$

4. $y = \dfrac{10}{x^3}$

5. $y = x\sqrt{x}$

6. $y = \dfrac{2}{\sqrt{x}}$

7. $y = \dfrac{4}{3\sqrt[3]{x}}$

8. $y = \dfrac{-5}{2\sqrt{10x}}$

Hallar las funciones explícitas definidas por las siguientes ecuaciones:

9. $2x^2 - 5y^2 = 4$

10. $x^2 - 3xy + y^2 - 5 = 0$

11. $x^3 - 4x^2y^2 + 5y^4 - 1 = 0$

12. $\operatorname{sen} x + \cos y = \dfrac{1}{2}$

13. $\operatorname{tg} x + 2 \operatorname{tg} 2y = 1$

Determinar las funciones inversas de las siguientes:

14. $y = 3x^2 - 5$

15. $y = 2x^2 + 1$

16. $y = a^{4x-2}$

CAPITULO **16**

Límite de una función

1. DEFINICION

Aclaremos esta noción fundamental con ejemplos. ¿Qué se entiende por límite de:

$$\frac{1}{4}\,\frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

al tender x a 1? El límite es un número que depende de los valores que toma la función en los puntos próximos al punto $x = 1$, pero no tiene nada que ver con el valor que la función tome en dicho punto $x = 1$.

Justamente, en este ejemplo, la función carece de valor en dicho punto. Consideremos valores de x cada vez más próximos a $x = 1$ y los correspondientes de $f(x)$.

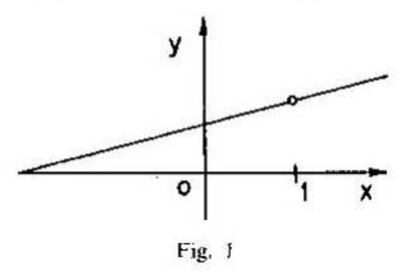


Fig. 1

$x = 0{,}9$	$f(x) = 0{,}47$	$x = 0{,}999$	$f(x) = 0{,}4997$
$x = 1{,}1$	$f(x) = 0{,}52$	$x = 1{,}001$	$f(x) = 0{,}5002$
$x = 0{,}99$	$f(x) = 0{,}497$		
$x = 1{,}01$	$f(x) = 0{,}502$	$x = 0{,}9999$	$f(x) = 0{,}49997$

Se ve que los valores de $f(x)$ pueden llegar a diferir de 0,5 tan poco como queramos tomando valores en x cuya diferencia con 1 sea suficientemente pequeña.

Podemos precisar más: los valores de $f(x)$ diferirán de 0,5 en menos de un

número prefijado ε, siempre que los puntos x disten del punto 1 menos de 4ε. En efecto, de la relación.

$$|x - 1| < 4\varepsilon, \qquad \text{resulta:} \quad \left|\frac{x}{4} - \frac{1}{4}\right| < \varepsilon,$$

luego:

$$\left|\frac{x+1}{4} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon; \quad \left|\frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)4} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$$

o bien:

$$\left|\frac{x^2 - 1}{4(x-1)} - 0{,}5\right| < \varepsilon \qquad \textit{c.q.d.}$$

Este número 0,5 es el límite de $f(x)$ cuando x tiende a 1. Insistimos en que el límite depende sólo de los valores que la función toma en las proximidades del punto considerado, pero no del valor del mismo en dicho punto, pues la función puede, incluso, estar no definida en él, como ocurre en el ejemplo que acabamos de considerar.

Vemos pues, que el límite de la función $f(x)$, cuando x tiende a a, es el número b, si se verifica que al aproximarse indefinidamente x a a los valores de la función $f(x)$ se aproxima indefinidamente a b.

Esto *no es todavía una definición correcta,* pues hay que precisar lo que se entiende por aproximarse indefinidamente, y esto es lo que hace la definición formal que damos a continuación.

Dada una función de una variable $y = f(x)$ definida en un intervalo o conjunto abierto S, diremos que:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

si, fijado un entorno $E[b, \varepsilon]$, se puede determinar un δ, tal que, para todo $x \in S$ y tal que:

$$0 < |x - a| < \delta$$

se verifique:

$$f(x) \in E[b, \varepsilon]$$

La desigualdad:

$$0 < |x - a| < \delta$$

define lo que se llama un *entorno reducido* $E'(a, \delta)$, es decir, un entorno de a, *excluido* a.

Geométricamente, en el diagrama cartesiano de la función (fig. 2), esto quiere decir que dado $\varepsilon > 0$ se puede elegir un entorno reducido del punto a, suficientemente pequeño, para que los valores de $f(x)$ difieran de b menos de ε. Fijada una banda de anchura $2\varepsilon > 0$ (limitada por las rectas $y = b - \varepsilon$, $y = b + \varepsilon$), los puntos representativos de la función correspondientes a un entorno reducido suficientemente pequeño de a, quedan comprendidos en dicha banda (salvo a lo sumo el punto correspondiente al punto de abscisa a). Obsérvese que a puede ser un extremo de S e incluso no pertenece a S.

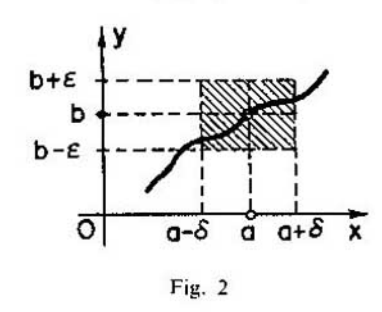


Fig. 2

EJEMPLOS:

1. El límite de una constante es la misma constante. Si es $f(x) = k$, se verifica siempre $\lim f(x) = k$, pues se tiene evidentemente $| f(x) - k | < \varepsilon$ cualquiera que sea $\varepsilon > 0$, para todo valor de x. Vemos que la función puede alcanzar el límite.

2. Probemos que

$$\lim_{x \to \infty} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$$

Si tomamos $| x | < \varepsilon$ como

$$\left| \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right| < 1 \qquad \text{resulta:} \qquad \left| x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right| < | x | < \varepsilon$$

es decir, para que los valores de la función difieran del límite, que es cero, en menos de ε, basta que los valores de la variable difieran del valor cero en menos de ε. Por ejemplo, para que sea $\left| x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right| < 0{,}01$, basta que sea: $| x | < 0{,}01$.

3. Sea la función $f(x) = E[x]$, que quiere decir *parte entera* del número real x, esto es, por ejemplo $E(1,5) = 1$, $E(\pi) = 3$, $E(3) = 3$, etc. Su representación gráfica para $x \geq 0$, aparece en la figura 3, y está formada por segmentos paralelos al eje x.

No existe

$$\lim_{x \to 2} E(x)$$

pues los valores $E(2 - \varepsilon) = 1$ difieren en 1 de los valores $E(2 + \varepsilon) = 2$, y, por tanto, ningún número puede diferir de *unos y otros* tan poco como queramos, tomando ε convenientemente pequeño.

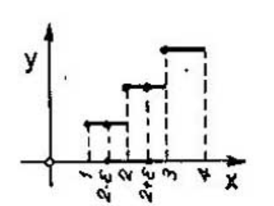


Fig. 3

En cambio, es inmediato ver, por ejemplo, que

$$\lim_{x \to 2,5} E(x) = 2$$

2. LIMITES LATERALES

Si en la definición de límite se sustituye el entorno $0 < |x - a| < \delta$ por el semientorno a la derecha: $a < x < a + \delta$, se dice que hay *límite por la derecha* y se escribe:

$$\lim_{x \to a+0} f(x)$$

el cual se designa también abreviadamente por $f(a + 0)$. Análogamente se define el límite por la izquierda:

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = f(a - 0)$$

Es inmediato que si $f(x)$ tiene en un punto a interior a S límite por la derecha y por la izquierda y estos son iguales tiene límite en a.

3. LIMITES DE FUNCIONES VECTORIALES

Recordemos que decíamos que x es el límite de una sucesión de números reales $\{x_n\}$, si fijado un entorno $E[x, \varepsilon]$ de x, existe un $n(\varepsilon)$ tal que para $n > n(\varepsilon)$ los $x_n \in E[x, \varepsilon]$. Si convenimos en decir que $n > n(\varepsilon)$ es un entorno de $+\infty$, la definición anterior se traduce así: $\lim_{n \to \infty} x_n = x$, si fijado un entorno $E(x, \varepsilon)$, existe un entorno $E[+\infty, n(\varepsilon)]$ tal que para $n \in E[+\infty, n(\varepsilon)]$, $x_n \in E(x, \varepsilon)$. Se ve así la analogía entre ésta definición y la que acabamos de dar, para límite de una función y ahora veremos como ambas pueden considerarse como caso particular de una definición más amplia.

Para funciones vectoriales, el concepto de límite es el siguiente: Sea $y = f(\mathbf{x})$ una función vectorial definida en un conjunto $S \subset R^m$ y que toma valores en un conjunto $T \subset R^k$. Si $\mathbf{a}$ es un punto de acumulación de S y $\mathbf{b} \in R^k$, decimos que:

$$\lim_{x \to a} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$$

si, fijado un entorno $E(\mathbf{b}, \varepsilon)$, se puede determinar un entorno reducido $E'(\mathbf{a}, \delta)$, tal que si es $\mathbf{x} \in E'(\mathbf{a}, \delta) \cap S$ se verifica $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in E[\mathbf{b}, \varepsilon]$.

Esta definición es, en el fondo, la misma dada para funciones de una variable y para sucesiones, a saber: que, fijado un entorno del límite de la función, se puede determinar un entorno reducido del límite de la variable, de modo que los puntos transformados de los del entorno pertenecen a aquel.

Unicamente conviene observar que en vez de $\mathbf{x} \in E'(\mathbf{a}, \delta)$, escribimos:

$$\mathbf{x} \in E'(\mathbf{a}, \delta) \cap S$$

para asegurar que $\mathbf{x}$ pertenezca a S. Del mismo modo establecemos que $\mathbf{a}$ sea punto de acumulación de S para evitar que $E'(\mathbf{a}, \delta) \cap S = \phi$. Si suponemos que S es un abierto la condición anterior se reduce a $\mathbf{x} \in E'(\mathbf{a}, \delta)$.

4. PROPIEDADES

I. TEOREMA DE UNICIDAD.—*Una función* $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ *no puede tener dos límites distintos cuando* $\mathbf{x} \to \mathbf{a}$.

Se demuestra como en el caso de sucesiones.

II. *Si dos funciones toman valores iguales en los puntos de un cierto entorno de* $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ *(salvo el punto* $\mathbf{a}$*), y una de ellas tiene límite cuando* $\mathbf{x} \to \mathbf{a}$*; la otra tiene este mismo límite cuando* $\mathbf{x} \to \mathbf{a}$.

Esta propiedad es una consecuencia inmediata de la definición de límite, ya que los límites de ambas funciones dependen solamente de los valores que toman en un cierto entorno de a (excluido a), y como estos valores son los mismos, ambos límites deben ser iguales.

Este teorema permite hacer transformaciones en las expresiones cuyo límite tratamos de hallar, simplificándolas, siendo lícitas operaciones que no lo serían si se considerase que la expresión toma el valor de $\mathbf{x} = \mathbf{a}$.

Así, por ejemplo, si tenemos

$$\frac{1}{4}\frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

esta función carece de valor numérico para $x = 1$, es decir, no está definida en dicho punto; pero si tratamos de hallar

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{4}\frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

podemos dividir numerador y denominador por $x - 1$ (operación que sólo es lícita si ponemos $x \neq 1$), con lo que, en virtud del teorema II, resulta:

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{4}\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{4}(x + 1) = \frac{1}{2}$$

En el teorema anterior se basa el llamado *método de los límites*, fundamento del cálculo infinitesimal; él permite pasar de una relación de igualdad entre dos funciones, válida en un cierto entorno de un punto (salvo en dicho punto), a la igualdad entre sus límites.

5. RELACION ENTRE LIMITES DE FUNCIONES Y DE SUCESIONES

Sea $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ *una función vectorial de variable vectorial en que* $\mathbf{x} \in S \subset R^m$ *e* $\mathbf{y} \in R^k$.

Sea $\mathbf{a}$ *un punto de acumulación de* S *y* $\mathbf{x}_n$ *una sucesión de puntos de* S, *tal que* $\mathbf{x}_n \neq \mathbf{a}$ *y* $\lim \mathbf{x}_n = \mathbf{a}$. *Se verifica que:*

1.° *Si es* $\lim\limits_{x \to a} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ *es también* $\lim\limits_{n \to \infty} \mathbf{f}(\mathbf{x}_n) = \mathbf{b}$.

2.° *Si existe* $\lim\limits_{n \to \infty} \mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$ *para toda sucesión* $\{ \mathbf{x}_n \}$, *el límite es el mismo para todas y también existe* $\lim\limits_{x \to a} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$.

1.°) Fijado un entorno $E(\mathbf{b}, \varepsilon)$ en R^k, existe un entorno $E'(\mathbf{a}, \delta)$ en R^m, tal que siempre que $\mathbf{x} \in E'(\mathbf{a}, \delta) \cap S$, se verifica $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in E(\mathbf{b}, \varepsilon)$. Pero, además, para el entorno $E'(\mathbf{a}, \delta)$ existe un $N(\delta)$ tal que para $n > N(\delta)$ es $x_n \in E'[\mathbf{a}, \delta]$; luego $\lim\limits_{n \to \infty} \mathbf{f}(\mathbf{x}_n) = \mathbf{b}$.

2.°) Si $\{ \mathbf{b}_n \}$ y $\{ \mathbf{c}_n \}$ son dos sucesiones tales que $lim\ \mathbf{f}(\mathbf{b}_n) = \mathbf{b}$, $lim\ \mathbf{f}(\mathbf{x}_n) = \mathbf{c}$, es necesariamente $\mathbf{b} = \mathbf{c}$. Pues la sucesión $\mathbf{b}_1, \mathbf{c}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{c}_2, \ldots$ tiene límite $\mathbf{a}$ y la sucesión de valores $\mathbf{f}(\mathbf{b}_1), \mathbf{f}(\mathbf{c}_1), \mathbf{f}(\mathbf{b}_2), \mathbf{f}(\mathbf{c}_2), \ldots$ también: pero los términos de esta sucesión llegan a ser unos tan próximos como queramos a $\mathbf{b}$ y otros a $\mathbf{c}$, luego $\mathbf{b} = \mathbf{c}$. Probemos ahora que existe $lim\ \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$. Si no existiera este límite, fijado un entorno $E[\mathbf{b}, \varepsilon]$, existirá en todo entorno $E'[\mathbf{a}, \delta]$ algún $\mathbf{x}_n \in S$, tal que:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \notin E[\mathbf{b}, \varepsilon]$$

Sea $\mathbf{x}_n$ el punto así elegido en $E'[\mathbf{a}, \frac{1}{n}] \cap S$; la sucesión $\mathbf{x}_n \to \mathbf{a}$ y es $\mathbf{x}_n \neq \mathbf{a}$; pero no se verifica $lim\ \mathbf{f}(\mathbf{x}_n) = \mathbf{b}$, lo que contradiría lo probado. Por tanto, $\lim\limits_{x \to a} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$.

6. CRITERIO DE CONVERGENCIA DE CAUCHY

Del criterio de convergencia de Cauchy demostrado para sucesiones numéricas se pasa mutatis mutandis al siguiente criterio para sucesiones en R^k: *si* $\{ \mathbf{x}_n \}$ *es una sucesión de* R^k, *es condición necesaria y suficiente para que exista* $\lim\limits_{n \to \infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{a}$ *que para todo* $\varepsilon > 0$ *exista un* $N(\varepsilon)$ *tal que para* $n > N(\varepsilon)$, $m > N(\varepsilon)$, *sea:*

$$| \mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m | < \varepsilon$$

Vamos a apoyarnos en éste para dar el *criterio de Cauchy para funciones vectoriales. Sea* $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ *una función* $\mathbf{y} \in R^k$ *de* $\mathbf{x} \in S \subset R^m$. *Una condición necesaria y suficiente para que exista* $\lim\limits_{x \to a} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$, *en que* $\mathbf{b}$ *es un punto de* R^k, *es*

que para todo $\varepsilon > 0$, *exista un entorno* $E'[\mathbf{a}, r(\varepsilon)]$ *tal que si* $\mathbf{x}$ *y* $\mathbf{t}$ *pertenecen a* $E'[\mathbf{a}, r(\varepsilon)] \cap S$, *sea* $|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{t})| < \varepsilon$.

El directo es inmediato: fijado $\varepsilon > 0$, podemos determinar un entorno $E'\left(\mathbf{a}, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ tal que para todo $\mathbf{x} \in E'\left(\mathbf{a}, \frac{\varepsilon}{2}\right) \cap S$; $|\mathbf{f}(\mathbf{a}) - \mathbf{b}| < \frac{\varepsilon}{2}$ y también

$$\mathbf{t} \in E'\left(\mathbf{a}, \frac{\varepsilon}{2}\right) \cap S$$

será:

$$|\mathbf{f}(\mathbf{t}) - \mathbf{b}| < \frac{\varepsilon}{2}$$

luego:

$$|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{t})| < |\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{b}| + |\mathbf{f}(\mathbf{t}) - \mathbf{b}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Para probar el recíproco, supongamos que fijado $\varepsilon > 0$, existe un $E'(\mathbf{a}, \varepsilon)$ tal que si $\mathbf{x}$ y $\mathbf{t}$ pertenecen a $E'(\mathbf{a}, \varepsilon) \cap S$ se verifica $|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{t})| < \varepsilon$. Sea $\mathbf{x}_n$ una sucesión cuyos puntos son $\mathbf{x}_n \neq \mathbf{a}$ y tal que $\lim \mathbf{x}_n = \mathbf{a}$. Se puede determinar un $N(\varepsilon)$, tal que para $n > N(\varepsilon)$, $m > N(\varepsilon)$, $|f(\mathbf{a}_m) - f(\mathbf{a}_n)| < \varepsilon$, luego por el criterio de Cauchy la sucesión $\mathbf{f}(\mathbf{a}_n)$ tiene límite. Y por el teorema anterior también existe $\lim\limits_{x \to a} \mathbf{f}(\mathbf{x})$.

7. LIMITES DE LAS OPERACIONES CON FUNCIONES

Si $f(\mathbf{x})$ y $\phi(\mathbf{x})$ están definidas en un conjunto S de R^m con valores en R y es $\mathbf{a}$ un punto de acumulación de S y se verifica que:

$$\lim_{x \to a} f(\mathbf{x}) = A$$

$$\lim_{x \to a} \phi(\mathbf{x}) = B$$

se tiene:

I. $\lim\limits_{x \to a} [f(\mathbf{x}) \pm \phi(\mathbf{x})] = A \pm B.$

II. $\lim\limits_{x \to a} kf(\mathbf{x}) = kA.$

III. $\lim\limits_{x \to a} [f(\mathbf{x}) \cdot \phi(\mathbf{x})] = A \cdot B.$

IV. $\lim [f(\mathbf{x}) : \phi(\mathbf{x})] = A : B$ supuesto $B \neq 0$.

Análogas propiedades valen para las potencias, logaritmos y exponenciales. Las propiedades I y II valen para funciones vectoriales.

Todas ellas se demuestran análogamente a como se hizo para las sucesiones, o bien, apoyándose en los teoremas ya demostrados para las sucesiones. Así, por ejemplo, para el teorema de la suma tendríamos para toda sucesión $x_n \to a$ es $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$ y $\lim_{n\to\infty} \phi(x_n) = B$, luego $\lim_{n\to\infty} [f(x_n) + \phi(x_n)[= A$,

luego:

$$\lim_{x\to a} [f(x) + \phi(x)] = A + B.$$

8. COMPLETACION DE LA RECTA R

Hemos visto que en el espacio R las sucesiones no acotadas no son convergentes y veremos ahora cómo introduciendo una definición apropiada de «entorno de $+\infty$» y de «entorno de $-\infty$», se unifica el lenguaje.

De un modo general, convendremos en llamar *recta completa* $\overline{R}$, a R con los dos nuevos elementos que serán el $+\infty$, límite de *toda* sucesión creciente no acotada superiormente, y $-\infty$, que será el límite de *toda* sucesión decreciente no acotada inferiormente.

Con este convenio resulta fácilmente que $\overline{R}$ *es un conjunto compacto*, ya que todo conjunto infinito de $\overline{R}$ tiene punto de acumulación, finito si es acotado e infinito si no es acotado.

Sin embargo, conviene advertir que estos elementos $+\infty$ y $-\infty$, así introducidos no verifican todas las reglas de cálculo de los números de R, si queremos respetar las reglas de cálculo de límites.

Admitiremos las siguientes reglas de cálculo en R.

Para sumas y productos (ambos conmutativos):

$$x > -\infty,\ x + (+\infty) = x - (-\infty) = +\infty$$

$$x < +\infty,\ x + (-\infty) = x - (+\infty) = -\infty$$

$$x > 0 \qquad x(+\infty) = +\infty,\ x(-\infty) = -\infty$$

$$x < 0 \qquad x(+\infty) = -\infty,\ x(-\infty) = +\infty$$

$$1/(+\infty) = 0, \qquad 1/(-\infty) = 0$$

No están definidos:

$$\infty + (-\infty),\ 0\cdot(+\infty),\ 0\cdot(-\infty).$$

9. CRECIMIENTO INFINITO

Supongamos que tratamos de ver si existe $\lim_{x\to -4} \dfrac{2}{(x+4)^2}$.

Si sustituimos valores próximos a -4, distintos de -4, resulta $x + 4$, tan

próximo a cero como queramos, y el cociente toma valores tan grandes como queramos. En tal caso, la fracción no puede tener por límite un número b, y se dice que *crece infinitamente* cuando $x \to -4$, y también que tiene *límite infinito* cuando $x \to -4$, escribiéndose:

$$\lim_{x \to -4} \frac{2}{(x+4)^2} = \infty$$

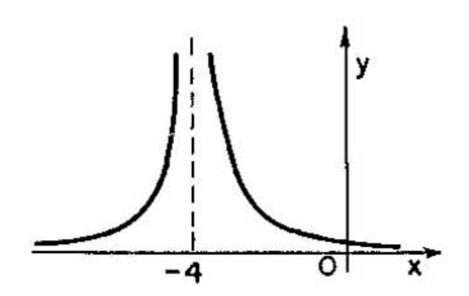


Fig. 4

Diremos que el límite de $f(x)$ es $+\infty$, cuando **x** *tiende a* **a**, *y escribiremos:*

$$\lim_{x \to a} f(\mathbf{x}) = +\infty$$

si dado un número arbitrariamente grande $H > 0$, se verifica: $f(\mathbf{x}) > H$, para todos los valores de **x** *suficientemente próximos a* **a**.

Análogamente, si se verifica $f(\mathbf{x}) < -H$, el límite es $-\infty$, y se escribe: $\lim_{x \to a} f(\mathbf{x}) = -\infty$.

Todas estas definiciones quedan como caso particular de la definición general de límite si convenimos es decir que el *entorno de* $+\infty$ es $y > H$ y *el entorno de* $-\infty$ es $y < -H$.

EJEMPLO:

$\lim \frac{1}{(x-3)^2} = +\infty$, pues será, $\frac{1}{(x-3)^2} > H$, es decir, $1 > H(x-3)^2$ si tomamos $(x-3)^2 < \frac{1}{H}$, o sea, $|x-3| < \frac{1}{\sqrt{H}}$

10. LIMITES PARA VALORES INFINITAMENTE CRECIENTES DE LA VARIABLE

El símbolo:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$$

expresa que *el límite de $f(x)$, cuando x crece infinitamente o tiende a $+\infty$, es b.* Esto quiere decir *que los valores de $f(x)$ llegan a diferir de b tan poco como queramos tomando x suficientemente grande.*

Esta definición queda como caso particular de la definición general de límite si convenimos en definir el entorno de $+\infty$ como el conjunto $x > H$.

Los teoremas del cálculo de límites, cuando $x \to a$, valen también cuando $x \to -\infty$.

Análogamente de define $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

EJEMPLO:

Sea calcular

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 2x}{5x^2 - 4}$$

Si aplicamos la regla del cociente, tendríamos que numerador y denominador tiende a ∞ y, por tanto, el cociente de los límites presentan la forma $\frac{\infty}{\infty}$ que carece de significado numérico. Dividiendo numerador y denominador por x^2, obtenemos:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 2x}{5x^2 - 4} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 - \frac{2}{x}}{5 - \frac{4}{x^2}} = \frac{\lim_{x \to +\infty} 1 - \lim_{x \to +\infty} - \frac{2}{x}}{\lim_{x \to +\infty} 5 - \lim_{x \to +\infty} - \frac{4}{x^2}} = \frac{1 - 0}{5 - 0} = \frac{1}{5}$$

EJERCICIOS

1. Calcular

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^3 - 12}{x^2 - 12}$$

2. Probar que

$$\lim_{n \to \infty} \left(\cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2^2} \dots \cos \frac{x}{2^n} \right) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}; \; x \neq 0$$

3. ¿Por qué $\lim_{x \to \infty} \frac{2x + 1}{3x + 2}$ no puede obtenerse como producto de $\lim_{x \to \infty} (2x + 1)$ por $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{3x + 2}$?

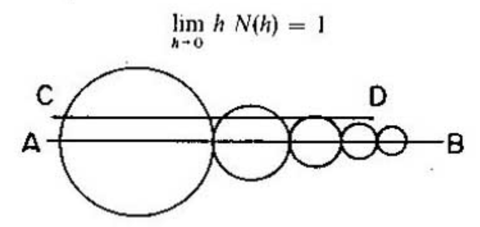
4. Calcular

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} kx}{x}; \quad \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} kx}{\operatorname{sen} k'x}; \quad \lim_{x \to 0} \frac{x \operatorname{sen} x}{1 - \cos x}; \quad \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{x} \right)$$

5. Una sucesión de circunferencias de radios 1, 1/2, 1/3, ... tienen sus centros sobre la recta *AB* y cada una (excepto la primera) es tangente a la anterior. Se traza una recta *CD*

paralela a AB, a distancia h. Sea $N(h)$ el número de circunferencias que tienen puntos comunes con CD (fig. 5). Probar que

$$\lim_{h \to 0} h\, N(h) = 1$$



6. *a*) Dibujar la gráfica de la curva $y = \frac{1}{x}\ (x \neq 0)$.

   b) Determinar la pendiente de la recta que une los puntos de esta curva de abscisas 2 y $2 + h$.

   c) Determinar el límite de esta pendiente cuando $h \to 0$.

7. La figura 6 representa un semicírculo, las cuerdas AB y CD son paralelas y sobre el radio perpendicular OG, se tiene: $EF = FG$.
Probar que

$$\lim_{OE \to r} \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \sqrt{2}$$

$$\lim_{OE \to r} \frac{\text{área de } ABCD}{\text{área de } C'\,D'\,DC} = \frac{\sqrt{2} + 1}{2}$$

8. En una función $z = f(x, y)$ de dos variables reales ha quedado definido, como caso particular el:

$$\lim_{(x,\, y) \to (a,\, b)} f(x, y) = L \qquad [1]$$

Conviene observar que esta manera de tender al límite:

$$(x, y) \to (a, b)$$

que se llama *bidemensional* o *límite doble*, supone que el punto de coordenadas (x, y) se aproxima al (a, b) por cualquier curva o conjunto de puntos (no importa cual) con tal que esté contenido en una sucesión de círculos de centro (a, b) y cuyos radios tiendan a cero.

Conviene no confundir dicho paso al límite bidimensional simbolizado por la notación [1], con el paso al *límite sucesivo*, simbolizado por la expresión:

$$\lim_{y \to b}\ \lim_{x \to a}\ f(x, y) \qquad [2]$$

que supone que primero $x \to a$, y después $y \to b$.

Si existe el límite [1], *existe el límite* [2], ya que éste consiste en seguir un camino particular formado por una quebrada de paralelas a los ejes.

Pero puede existir [2] y:

$$\lim_{x \to a} \lim_{y \to b} f(x, y) \qquad [3]$$

y no existir [1].

Por ejemplo:

$$\lim_{x \to 0} \lim_{y \to 0} \frac{x + y}{x - y} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x} = 1$$

$$\lim_{y \to 0} \lim_{x \to 0} \frac{x + y}{x - y} = \lim_{y \to 0} \frac{y}{-y} = -1$$

luego no existe el límite doble:

$$\lim_{(x, y) \to (0, 0)} \frac{x + y}{x - y}$$

ya que para su existencia *es necesario (pero no suficiente) que los dos límites sucesivos existan* y sean iguales, y esta condición no se cumple en nuestro ejemplo.

Si en esta función hacemos $y = \lambda x$, queda:

$$\frac{x + y}{x - y} = \frac{x(1 + \lambda)}{x(1 - \lambda)} = \frac{1 + \lambda}{1 - \lambda}$$

Así se ve que al tender $(x, y) \to (0, 0)$ por una recta, el límite depende del coeficiente angular de la recta, ya que dicho límite es, evidentemente:

$$\frac{1 + \lambda}{1 - \lambda}$$

9. Calcular el límite de la función:

$$z = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$$

cuando $(x, y) \to (0, 0)$ según una recta de pendiente λ.

10. Idem. según la recta $x = 0$. ¿Se puede deducir de este resultado que existe el:

$$\lim_{(x, y) \to (0, 0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$$

Calcular dicho límite cuando $(x, y) \to (0, 0)$ por la parábola:

$$y^2 = x$$

11. Estudiar el límite de la función:

$$z = \frac{x - y}{x + y}$$

cuando $(x, y) \to (0, 0)$ por las mismas trayectorias que en los dos problemas anteriores y por la espiral:

$$x = e^{\theta}$$

CAPITULO **17**

Continuidad

1. CONCEPTO DE FUNCION CONTINUA

Todos tenemos la idea intuitiva de que la gráfica de una función continua se caracteriza porque no presenta saltos y podemos dibujarla *continuamente,* sin levantar el lapicero. Para dar una definición precisa de función continua hay que apoyarse en la noción de límite.

Dijimos que el límite de una función, por ejemplo $f(x) = \frac{1}{4}\,\frac{x^2-1}{x-1}$, cuando $x \to 1$, es un número que depende únicamente de los valores que $f(x)$ toma en la proximidad de dicho punto $x = 1$, pero no del valor que $f(x)$ tiene para $x = 1$. Vimos que, en el caso considerado, es $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \frac{1}{2}$ y que la función no está definida para $x = 1$. Tal función se llama *discontinua* en el punto $x = 1$.

También se llama discontinua en un punto una función si carece de límite en dicho punto.

En general, damos la siguiente

DEFINICION. Una función $f(x)$ definida en un intervalo abierto I, es *continua en el punto* $x = a$ de I, si:

$$1.^{\circ} \quad \text{existe } \lim_{x\to a} f(x)$$

$$2.^{\circ} \quad \text{es } \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Una función se dice *continua en el intervalo abierto I si lo es en cada uno de sus puntos.*

Teniendo en cuenta la definición de límite, resulta como consecuencia inmediata:

Si $f(x)$ es una función definida en el intervalo I y $a \in I$, es $f(x)$ continua en a si para cada $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$, tal que para $x \in I$, y $|x - a| < \delta$ se verifica $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Si llamamos a la diferencia $x - a$ incremento de a y lo designamos por:

$$\Delta a = x - a$$

y, análogamente, el incremento de la función:

$$\Delta f(a) = f(x) - f(a) = f(a + \Delta a) - f(a)$$

podemos enunciar la definición en la forma siguiente:

El incremento de la función en un punto, es decir:

$$\Delta f(a) = f(a + \Delta a) - f(a)$$

se puede hacer tan pequeño como queramos, haciendo suficientemente pequeño el incremento Δa *(positivo o negativo) de la variable independiente, siempre para valores* $x \in I$.

EJEMPLOS:

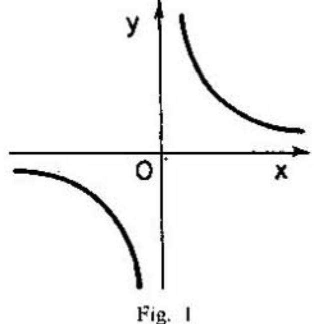


Fig. 1

1. $f(x) = x^2$ es continua para todo valor a de x, pues:

$$\lim_{x \to a} x^2 = \lim_{x \to a} x \cdot \lim_{x \to a} x = a \cdot a = a^2$$

2. $y = \dfrac{1}{x}$ tiene una discontinuidad en el punto $x = 0$, donde no tiene valor numérico (fig. 1).

3. $y = E(x)$ (parte entera de x), ya estudiada, tiene discontinuidades finitas en los puntos enteros.

En la práctica es muy frecuente encontrar funciones discontinuas en algunos puntos.

4. El coste de un viaje en ferrocarril, con kilométrico, es una función discontinua de la distancia, ya que no se tienen en cuenta fracciones inferiores a 5 kilómetros. Los puntos de discontinuidad son los de abscisas 5, 10, 15, ... (fig. 2).

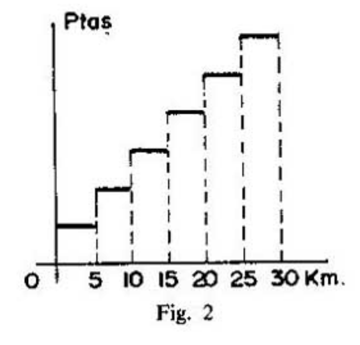


Fig. 2

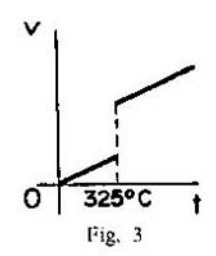


Fig. 3

5. Si se tiene una masa de plomo y se calienta, la función que da el volumen ocupado, mediante la temperatura, experimenta un incremento brusco (discontinuidad) al llegar a la temperatura denominada punto de fusión (fig. 3).

Si una función $f(x)$ tiene límite a la derecha del punto a; es decir, existe $f(a + 0)$ y es $f(a) = f(a + 0)$ se dice *continúa a la derecha de* a. Análogamente se define la *continuidad a la izquierda*. Si se verifica la continuidad a la derecha y a la izquierda de a se verifica la continuidad en a.

2. CONTINUIDAD DE UNA FUNCION VECTORIAL

Sea $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ *una función definida para* $x \in S \subset R^m$ *con valores* $y \in R^k$, *sea* $\mathbf{a}$ *un punto del abierto* S.

Se dice que $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ *es continua en* $\mathbf{a}$ *si:*

1.° *existe* $\lim_{x \to a} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$.

2.° *es* $\mathbf{b} = \mathbf{f}(\mathbf{a})$.

Si $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ es continua en todos los puntos de S se dice *continua en* S.

Teniendo en cuenta la definición de límite, la continuidad en un punto $\mathbf{a}$ del abierto S, puede expresarse también de uno de estos modos:

1.° para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que $|\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta$ implica:

$$|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{a})| < \varepsilon$$

2.° que para todo entorno $E[\mathbf{f}(\mathbf{a}), \varepsilon]$, existe un entorno $E'[\mathbf{a}, \delta]$, tal que:

$$f[E'(\mathbf{a}, \delta)] \subset E[\mathbf{f}(\mathbf{a}), \varepsilon]$$

Teorema. Una función $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ *es continua en un punto* $\mathbf{a}$, *si y sólo si,* $\mathbf{x}_n \to \mathbf{a}$ *implica* $\mathbf{f}(\mathbf{x}_n) \to \mathbf{f}(\mathbf{a})$.

Supongamos que $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ sea continuá en $\mathbf{a}$, y que la sucesión $\mathbf{x}_n \to \mathbf{a}$. Sea un $E(\mathbf{f}(\mathbf{a}), \varepsilon)$. Por la continuidad existe un $E'(\mathbf{a}, \delta)$, tal que:

$$f[E'(\mathbf{a}, \delta)] \subset E[\mathbf{f}(\mathbf{a}), \varepsilon]$$

Como $\mathbf{x}_n \to \mathbf{a}$, fijado δ existe un $n(\delta)$, tal que, para $n > n(\delta)$, $x_n \in E[\mathbf{a}, \delta]$, y las correspondientes:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_n) \subset E[\mathbf{f}(\mathbf{a}), \varepsilon]$$

luego:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_n) \to \mathbf{f}(\mathbf{a})$$

Si $\mathbf{f(x)}$ no es continua en $\mathbf{a}$ veremos que $\mathbf{x}_n \to \mathbf{a}$ no implica $\mathbf{f(x}_n) \to \mathbf{f(a)}$. Por la hipótesis de discontinuidad fijado un $E[\mathbf{f(a)}, \varepsilon]$, no existe ningún $E'[\mathbf{a}, \delta]$ tal que su imagen mediante $\mathbf{f}$ esté contenida en aquel entorno. Sea $\mathbf{x}_n$, tal que:

$$\mathbf{x}_n \in E\left[\mathbf{a}, \frac{1}{n}\right]$$

y

$$f(\mathbf{x}_n) \notin E[\mathbf{f(a)}, \varepsilon]$$

Evidentemente, $\mathbf{x}_n \to \mathbf{a}$ y:

$$\mathbf{f(x}_n) \not\to \mathbf{f(a)}$$

Una consecuencia inmediata *es que* $\mathbf{y} = \mathbf{f(a)}$ *es continua en un abierto* S *si y sólo si* $\mathbf{x}_n \to \mathbf{a}$ *implica* $\mathbf{f(x}_n) \to \mathbf{f(a)}$ *o*, dicho en palabras, *la continuidad en* S *conserva la convergencia.*

De aquí resulta $\mathbf{f(x)}$ *no es continua en un punto* $\mathbf{a}$ *si y sólo si existe una sucesión* $\mathbf{x}_n \to \mathbf{a}$, *tal que* $\mathbf{f(x}_n)$ *no tiende a* $\mathbf{f(a)}$.

3. OPERACIONES CON FUNCIONES CONTINUAS

Como consecuencia de los teoremas de límites y de la definición de continuidad resulta: *Las sumas, productos y cocientes de funciones continuas son funciones continuas salvo, quizá, en los puntos en que se anula el denominador (en el caso de cociente).* En el caso de funciones vectoriales se entenderá por producto el producto escalar.

De aquí resulta que, como la función $f(x) = x$ es continua, también lo es la $x^2 = x \cdot x$, la $x^3 = x^2 \cdot x$, ..., la x^n, cualquier polinomio (por ser suma de potencias de x multiplicadas por constantes) y también cualquier función racional, excepto, acaso, en los ceros del denominador.

La función exponencial es continua para todo valor de x y la logarítmica para $x > 0$.

La función potencial x^a es continua para $x > 0$, cualquiera que sea a. En el caso de ser a positivo, entero o racional de denominador impar $\frac{m}{2n+1}$ resulta continua en todo el campo real. Si en las mismas hipótesis el exponente es negativo, el origen es punto de discontinuidad.

Las funciones trigonométricas *sen* x y *cos* x son continuas en todo el campo real; en la *tg* x hay que excluir los puntos $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ y en la *ctg* x los $x = k\pi$.

Las funciones ciclométricas son continuas en todo su campo de definición.

De aquí resulta que las llamadas funciones elementales son continuas salvo, a lo más, en los puntos de discontinuidad de alguna de las funciones componentes.

La verificación de la continuidad permite calcular muchos límites con gran sencillez, ya que, si $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ es continua en el punto a, se verifica $\lim_{x \to a} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{a})$, es decir, *basta calcular el valor de la función en el punto* $\mathbf{a}$.

EJEMPLOS:

1. Para calcular $\lim_{x \to 1} \frac{5x^2 - 1}{7x + 2}$, basta hallar el valor de la fracción para $x = 1$, que es 4/9, pues se trata de una función continua en ese punto.

2. Pero si fuese $\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1}$, ya no podríamos aplicar ésto, pues dicha función es discontinua para $x = -1$. Por otra parte, la sustitución $x = -1$ nos conduciría a 0/0, que carece de sentido.

Se tiene:
$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \lim_{x \to -1} \frac{(x + 1)(x - 1)}{x + 1} = \lim_{x \to -1} \frac{x - 1}{1} = -2$$

Si $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ *es continua en un punto lo es* $|\mathbf{f}(\mathbf{x})|$.

Basta observar que, por la desigualdad triangular, es:

$$||\mathbf{f}(\mathbf{x})| - |\mathbf{f}(\mathbf{a})|| < |\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{a})|$$

En general, sea $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ una función definida para:

$$\mathbf{x} \in S \subset R^n$$

y sea:

$$\mathbf{f}(S) = T \subset R^m$$

Sea $\mathbf{z} = \mathbf{g}(\mathbf{y})$ una función definida en $\mathbf{f}(S)$, con valores en R^k y sea $\mathbf{g}*\mathbf{f}$ la función definida en S por la igualdad:

$$\mathbf{z} = \mathbf{g}*\mathbf{f} = \mathbf{g}[\mathbf{f}(\mathbf{x})]$$

que es la que hemos llamado *función compuesta* o *función de función*.

Se verifica la siguiente propiedad:

Si $\mathbf{a}$ *es punto de acumulación de* S *y* $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ *es continua en* $\mathbf{a}$, *si además* $\mathbf{b} = \mathbf{f}(\mathbf{a})$ *es punto de acumulación de* $\mathbf{f}(S)$ *y* $\mathbf{g}$ *es continua en* $\mathbf{b} = \mathbf{f}(\mathbf{a})$, *se verifica que la función compuesta* $\mathbf{g}[\mathbf{f}(\mathbf{x})]$ *es continua en* $\mathbf{a}$.

Por la continuidad de **g** en **b**, a todo entorno $E[\mathbf{g}(\mathbf{b}), \varepsilon]$ en R^k le corresponde un entorno $E[\mathbf{b}, \delta]$, tal que si:

$$\mathbf{y} \in E[\mathbf{b}, \delta] \cap \mathbf{f}(S)$$

es:

$$\mathbf{g}(\mathbf{y}) \in E[\mathbf{g}(\mathbf{b}), \varepsilon]$$

Pero por la continuidad de **f** para el entorno $E[\mathbf{b}, \delta]$, podemos determinar $E[\mathbf{a}, \delta]$ de R^n, tal que si:

$$\mathbf{x} \in E[\mathbf{a}, \delta] \cap S$$

es:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in E[\mathbf{b}, \delta]$$

Luego al entorno $E[\mathbf{g}(\mathbf{b}), \varepsilon]$ le corresponde un entorno $E[\mathbf{a},\delta]$, tal que si:

$$\mathbf{x} \in E[\mathbf{a}, \delta] \cap S$$

se verifica:

$$\mathbf{g}[\mathbf{f}(\mathbf{x})] \in E[\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{a}), \varepsilon]$$

como queríamos demostrar.

4. PROPIEDADES GLOBALES DE LAS FUNCIONES CONTINUAS

Hasta aquí hemos considerado la continuidad como una propiedad de la función en el entorno de un punto, es decir, como una propiedad local. Vamos a estudiar ahora teoremas globales, que son consecuencias más profundas, que resultan para el comportamiento de la función al admitir la propiedad de continuidad para todos los puntos de un conjunto.

Una primera propiedad, que parece intuitiva, es que una función continua transforma un conjunto abierto en un conjunto abierto. Esta propiedad no es cierta, como demuestra el ejemplo de la función:

$$y = \frac{1}{1 + x^2}$$

que es continua en $(-\infty, +\infty)$ y transforma el intervalo abierto $(-1, +1)$ en el intervalo $(1/2, 1]$ que no es abierto.

Mientras no se diga otra cosa consideraremos funciones vectoriales, cuyo dominio de definición es un conjunto $D \subset R^n$ y el contradominio un conjunto $F \subset R^q$.

Si designamos la función por $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, llamaremos *imagen inversa de un conjunto* $B \subset R^q$, al conjunto de todos los puntos $\mathbf{x}$ cuyas imágenes son los puntos de B. Escribiremos abreviadamente:

$$\mathbf{f}^{-1}(B) = (\mathbf{x} \in D \mid \mathbf{f}(\mathbf{x}) \in B)$$

Se observa que $\mathbf{f}^{-1}(B) \subset D$, aunque B no sea un subconjunto del contradominio de D.

Teorema de la continuidad global. Una condición necesaria y suficiente para que $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ *sea continua en un dominio* D *es que:* 1.º *si* G *es un conjunto abierto de* R^q, *exista un conjunto abierto* G_1 *en* R^n, *tal que* $G_1 \cap D = \mathbf{f}^{-1}(G)$. 2.º *si* F *es un conjunto cerrado en* R^q *exista un conjunto cerrado* F_1 *en* R^n *tal que* $F_1 \cap D = \mathbf{f}^{-1}(F)$.

Supongamos que $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ sea continua y que G sea un conjunto abierto de R^q. Si $\mathbf{a}$ es un punto de $\mathbf{f}^{-1}(G)$; como G es un entorno de $\mathbf{f}(\mathbf{a})$, resulta, por ser $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ continua en $\mathbf{a}$, que existe un conjunto abierto $E(\mathbf{a})$ tal que si $\mathbf{x} \in \mathbf{D} \cap E(\mathbf{a})$ es $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in G$. Asignemos a cada $\mathbf{a}$ un $E(\mathbf{a})$ y sea G_1 la unión de éstos. Esta unión es un abierto y, por tanto:

$$G_1 \cap D = \mathbf{f}^{-1}(G)$$

Dejamos como ejercicio la demostración del recíproco, así como del segundo teorema.

Teorema de la compacidad. Si $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ *es una función continua en un conjunto compacto* D *de* R^n, *cuyo contradominio* $\subset R^q$. *Se verifica que* $\mathbf{f}(D)$ *es un conjunto compacto.*

Sea $G = (G_a)$ una familia de conjuntos abiertos de R^q cuya unión recubre $\mathbf{f}(D)$. Por el teorema de la continuidad global a cada conjunto G_a de G le corresponde un subconjunto abierto C_a de R^n tal que:

$$C_a \cap D = \mathbf{f}^{-1}(G_a)$$

La familia $C = \{ C_a \}$ está formada por conjuntos abiertos de R^n y vamos a probar que la unión de éstos recubre D. En efecto, si:

$$\mathbf{x} \in D,\ \mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbf{f}(D),$$

luego $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ pertenece a algún G_a y, por tanto, $\mathbf{x}$ pertenece al correspondiente C_a. Como D es compacto, está contenido en la unión de un número finito de conjuntos de C y su imagen está contenida en la unión de un número finito de conjuntos de G. Como esto vale para toda familia G de conjuntos abiertos, el conjunto $\mathbf{f}(D)$ es compacto en R^q.

5. CONTINUIDAD DE LA FUNCION INVERSA

Sea $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ *una función continua en un conjunto compacto* $S \subset R^n$ *y tal que* $\mathbf{f}(S) \subset R^q$. *Supongamos que además* $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ *es una aplicación biunívoca, es decir, existe la función inversa* $\mathbf{f}^{-1}$. *Entonces esta función inversa es continua en* $\mathbf{f}^{-1}(S)$.

Sea $\mathbf{y}_n \in \mathbf{f}(S)$ una sucesión de puntos tal que $\lim \mathbf{y}_n = \mathbf{y} \in \mathbf{f}(S)$. Sea $\mathbf{x}_n = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y}_n)$. El conjunto $\{ \mathbf{x}_n \}$ es un subconjunto infinito del conjunto compacto S, luego tiene un punto de acumulación $\mathbf{x} \in S$. Se puede extraer de $\{ \mathbf{x}_n \}$ una sucesión parcial $\{ \mathbf{x}_{n_i} \}$ tal que $\lim \mathbf{x}_{n_i} = \mathbf{x}$.

Por ser $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ continua tenemos $\lim \mathbf{f}(\mathbf{x}_{n_i}) = \mathbf{f}(\mathbf{x})$. Como la sucesión $\mathbf{f}(\mathbf{x}_{n_i})$ es una sucesión parcial de $\mathbf{y}_n$ será $\lim \mathbf{f}(\mathbf{x}_n) = \mathbf{y}$. Luego $\mathbf{x} = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y})$, es decir, $\mathbf{x}$ es el único punto de acumulación de $\{ \mathbf{x}_n \}$. Por tanto, $\lim \mathbf{x}_n = \mathbf{x}$, o, lo que es lo mismo, $\lim \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y}_n) = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y})$, luego la función $\mathbf{f}^{-1}$ es continua en $\mathbf{y}$.

Una aplicación $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ *biunívoca y bicontinua se llama una aplicación topológica o también homeomórfica.*

Una propiedad como la compacidad de un conjunto, que es invariante respecto a toda aplicación topológica, se llama topológica.

6. TEOREMA DE LOS CEROS (BOLZANO)

Si $y = f(x)$ *es continua en el intervalo cerrado* $I = [a, b]$ *y toma valores de signos opuestos en los extremos del intervalo, se anula al menos en un punto interior.*

La propiedad del teorema de Bolzano corresponde a la idea intuitiva de función continua. Sin embargo, hay algunas funciones discontinuas que tienen la propiedad del teorema de Bolzano, como puede comprobarse en la función:

$$y = sen \frac{1}{x}$$

Para demostrar el teorema de Bolzano, supongamos, por ejemplo, que $f(a) < 0 < f(b)$ y demostremos que hay un punto x_0 en que $f(x_0) = 0$, siendo $a < x_0 < b$. Sea S el conjunto de todos los puntos $x \in I$ tales que $f(x) < 0$. Este conjunto S no es vacío y tiene como cota o mayorante b, luego tiene un supremo o mínima cota superior x_0. Vamos a probar que $f(x_0) = 0$. Si fuera $f(x_0) < 0$, por la continuidad en x_0, sería $| f(x) - f(x_0) | < \varepsilon$ para $| x - x_0 | < \delta$. Tomemos ε tal que $f(x_0) + \varepsilon < 0$.

Tendremos que a uno y otro lado de x_0 habrá puntos en que $| f(x) - f(x_0) | < \varepsilon$, o bien:

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$$

y como $f(x_0) + \varepsilon < 0$, habrá a la derecha de x_0 puntos en que $f(x) < 0$ contra la hipótesis de que x_0 es la mínima cota superior. Análogamente se ve que no puede ser $f(x_0) > 0$. Por tanto, ha de ser $f(x_0) = 0$.

Como consecuencia resulta:

Si $f(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y $f(a) \neq f(b)$ toma $f(x)$ cada valor η comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$ al menos una vez.

Pues la función $f(x) - \eta$ es continua en el intervalo $[a, b]$ y toma en los extremos del intervalo valores $f(a) - \eta$, $f(b) - \eta$ de signos contrarios; luego por el teorema anterior, existe al menos un punto ξ del intervalo tal que:

$$f(\xi) - \eta = 0 \therefore f(\xi) = \eta \qquad \text{c.q.d.}$$

7. MAXIMOS Y MINIMOS

Una función $y = f(x)$ definida en I que toma en un punto $x_0 \in I$ un valor no superado por ningún otro valor de la función en I se dice que tiene un *máximo absoluto* en x_0. Si dicha propiedad vale en un entorno de x_0 se dice que la función tiene en x_0 un *máximo relativo.*

Si $f(x_0)$ es un máximo relativo, para $h < \varepsilon$, siendo ε suficientemente pequeño se verifica:

$$f(x_0 + h) \leqslant f(x_0)$$

$$f(x_0 - h) \leqslant f(x_0)$$

Análogamente se define el *mínimo absoluto* y el *mínimo relativo.*

Las definiciones anteriores se generalizan inmediatamente a las funciones de n variables.

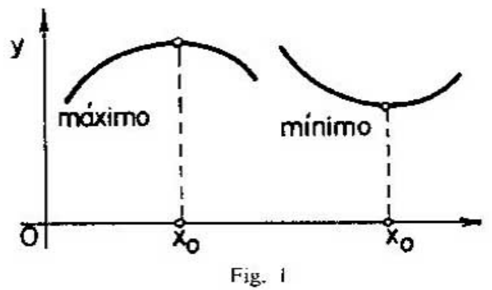


Fig. 1

La función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ es continua en el intervalo $(0, 1)$. Si $x \in (0, 1)$, se verifica: $f\left(\dfrac{x}{2}\right) >$ $> f(x)$, luego no tiene máximo en $(0, 1)$.

8. TEOREMA DE WEIERSTRASS

Si $y = f(x)$ *es continua en* $I = [a, b]$, *es acotada superior e inferiormente y alcanza su máximo y su mínimo en* I.

Este teorema es válido para funciones reales de n variables y su demostración puede obtenerse fácilmente del teorema de la compacidad. Sin embargo, daremos una demostración directa.

Supongamos que f no sea acotado superiormente. Existen puntos $x_n \in I$ tales que $|f(x_n)| > n$. El conjunto $S = \{x_1, x_2, ...,\}$ es infinito y, por ser acotada, tiene un punto de acumulación $c \in I$. Vamos a ver que $f(x)$ tiene que ser discontinua en c. Supongamos $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$. Existen infinitos puntos $x \in S$ tales que $|x_k - c| < \delta$ y que $f(x_k) > f(c) + \varepsilon$. Luego $f(x_k) - f(c) = |f(x_k) - f(c)| > \varepsilon$, esto es, $f(x)$ no es continua en c. Debemos, pues, concluir que $f(x)$ es acotada.

Sea M la mínima cota superior de los valores $f(x)$ para $x \in I$. Para cada n sea $x_n \in I$, tal que $f(x_n) > M - \dfrac{1}{n}$. Que tal x_n existe, se deduce de la definición de M. Si sólo existe un número finito de x_n distintos, existe un k tal que infinitos valores de x_n son tales que $x_n = x_k$ y, por tanto, $f(x_k) = M$. Si existen infinitos x_n distintos, el conjunto $S = \{x_1, x_2, ...,\}$ es infinito y acotado, luego tiene un punto de acumulación $x_0 \in I$. Dado $\varepsilon > 0$, como $f(x)$ es continua en x_0, existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(x_0)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ para $|x - x_0| < \delta$. Puesto que x_0 es punto de acumulación de S, existe un k tal que $|x - x_0| < \delta$ y $\dfrac{1}{k} < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Luego $|M - f(x_0)| = |M - f(x_k) + f(x_k) - f(x_0)| < |M - f(x_k)| + |f(x_k) - f(x_0)| < \dfrac{1}{k} + \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Como esto vale para todo ε, resulta $M = f(x_0)$, es decir, $f(x)$ alcanza su máximo.

Análogamente se prueba que $f(x)$ alcanza su mínimo.

Como consecuencia de este teorema y del de Bolzano, resulta que *el conjunto de los valores* $f(x)$ *correspondientes a los valores* $x \in [a, b]$ *forman un intervalo* $[m, M]$ *o se reducen a un punto si* $m = M$.

9. CONTINUIDAD UNIFORME

Consideremos la función $y = \dfrac{1}{x}$ en el intervalo abierto por la izquierda (0,10).

Tenemos:

$$|\Delta y| = |y - y_0| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| = \frac{|x - x_0|}{xx_0} = |\Delta x_0| \cdot yy_0$$

Resulta, pues, que si $x_0 = 4$, $y_0 = \frac{1}{4}$, para que $|\Delta y| < 0{,}1$, bastará que $|\Delta x_0| < 1$. En cambio, si $x_0 = 1$, para que $|\Delta y| < 0{,}1$, no basta que $|\Delta x_0| < 1$, sino que hay que hacer $|\Delta x_0| < 0{,}09$. Se ve que a medida que x_0 se aproxima al origen, para un mismo Δx_0 (negativo), el incremento (positivo) de y es mayor e incluso llega a ser tan grande como queramos.

Diremos que $f(x)$ *es uniformemente continua* en un intervalo I, si dado $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeño, se puede determinar δ, de modo que para todo par de puntos x', x'' de I, tales que $|x' - x''| < \delta$, es $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

Resulta que la función $y = \frac{1}{x}$ no es uniformemente continua en el intervalo [0,4], a pesar de ser continua en todos los puntos del mismo. El punto 0 no pertenece al intervalo, y la función es discontinua en él; pero hay puntos del intervalo tan próximos como se quiera al punto de discontinuidad.

TEOREMA DE CANTOR-HEINE.—*Una función continua en un intervalo cerrado es uniformemente continua.*

Si no fuera uniformemente continua, existiría un $\varepsilon > 0$, tal que para infinitos pares x', x'', tan próximos como quisiéramos sería $|f(x') - f(x'')| > \varepsilon$. Dividido $[a, b]$ en dos por su punto medio c, en uno, al menos, de los dos intervalos cerrados $[a, c]$, $[c, b]$ habrá infinitos pares como los anteriores; pues si los pares tuvieran un punto en cada intervalo, su punto de acumulación sería c y éste sería su punto de discontinuidad. Elegido aquél de los dos intervalos que contengan una infinidad de pares de tales puntos, le dividiremos de nuevo en dos, etcétera. Esta sucesión de intervalos contiene un punto tal que en todo entorno suyo existen pares donde los valores de $f(x)$ difieren en más de ε, y es, por tanto, un punto de discontinuidad. Tal punto puede ser interior al intervalo o coincidir con un extremo, pero, en todo caso, tenemos una contradición, ya que hemos supuesto la continuidad en el intervalo cerrado.

La definición y el teorema de la continuidad uniforme se generalizan inmediatamente a las funciones de n variables y a las funciones vectoriales.

10. FUNCIONES MONOTONAS

Se dice que $y = f(x)$, definida en un intervalo I, es *estrictamente creciente* en I, si para todo par de puntos distintos x_1, x_2 de I, se verifica que:

$$m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$$

Si solamente exigimos que la razón anterior sea $\geqslant 0$ se dice la función simplemente *creciente*. Análogamente se define la función *decreciente* y *estrictamente decreciente* cuando $m \leqslant 0$ o $m < 0$. Una función que está en uno u otro caso (pero no en los dos) se llama *monótona*.

Es inmediato ver que *si* $f(x)$ *es monónota creciente en* (a, b) *es acotada superior e inferiormente*, pues tiene como cotas $f(a)$ y $f(b)$. Esta propiedad la tienen las funciones continuas en (a, b).

Tal propiedad indica una cierta relación entre la continuidad y la monotonía. Esta relación se precisa en el siguiente teorema fundamental: *Si* $y = f(x)$ *es una función continua estrictamente creciente en un intervalo* (a, b), *la función inversa es continua estrictamente creciente en el intervalo* $(f(a); f(b))$. *La correspondencia entre estos dos intervalos es, pues, biunívoca y bicontinua y se llama homeomorfía.*

Ya hemos visto que la función $f(x)$ por ser estrictamente monótona creciente tiene como cotas inferior y superior $\alpha = f(a)$ y $\beta = f(b)$, respectivamente. Por ser la función $f(x)$ continua en (a, b), fijado un valor y, tal que $\alpha \leqslant y \leqslant \beta$, toma este valor en al menos un punto x del intervalo. Y sólo puede tomarlo en un punto, pues si tomara el mismo valor y en dos puntos distintos x_1, x_2 tendríamos una contradición por ser la función estrictamente monótona: $f(x_1) < f(x_2)$. Como el valor y considerado no es alcanzado más que una vez en (a, b), resulta que la función $y = f(x)$ establece una correspondencia biunívoca entre los intervalos (a, b) y (α, β), y la correspondencia $x = f^{-1}(y)$, es la que hemos llamado función inversa. Vamos a probar: 1.° esta función $x = f^{-1}(y)$ es estrictamente monótona en (α, β), pues:

$$\frac{f^{-1}(y_2) - f^{-1}(y_1)}{y_2 - y_1} = \frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)} > 0$$

por ser estrictamente monótona $y = f(x)$.

2.° esta función $x^{-1}(y)$ es *continua* en (α, β).

Dado un entorno $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ de x_0, en que $\delta > 0$ es arbitrariamente pequeño y tal que dicho entorno es interior a (a, b), supongamos que el entorno transformado es $(y_0 - \varepsilon_1, y_0 + \varepsilon_2)$. Si tomamos un entorno $(y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ contenido en éste, estamos seguros de que su transformado está contenido en el $(y_0 - \delta, y_0 + \delta)$, luego la función $x = f^{-1}(y)$ es continua en y_0. Análogamente se demuestra la continuidad a la derecha en α, y la continuidad a la izquierda en β.

11. FILTROS Y CONJUNTOS DIRIGIDOS. GENERALIZACION DEL CONCEPTO DE LIMITE Y DE CONTINUIDAD

A pesar de la generalidad del concepto de límite de una aplicación vectorial es insuficiente para algunos capítulos del análisis, como, por ejemplo, el para establecer el concepto de integral. Si consideramos el caso de una función real de variable vectorial $y = f(\mathbf{x})$, definida para $\mathbf{x} \in D$, podemos generalizar la noción de límite de la siguiente forma: fijado un entorno del límite de la función,

se puede determinar un conjunto A de una familia Π de conjuntos contenidos en D tal que para cada $\mathbf{x} \in A$ está $f(\mathbf{x})$ en el entorno fijado. Pero se observa que esta definición tan general no permite obtener resultados concretos interesantes. En la definición que hemos utilizado en los párrafos precedentes, la familia Π es una familia de entornos reducidos.

Vamos, pues, a adoptar un punto de vista un poco más general que éste, pero sin llegar a la generalidad total que no conduce a nada.

Para ello introduciremos la siguiente definición: diremos que una familia Π de subconjuntos de D es una *dirección* o una *base de filtro* en D si se verifica:

1.° Π *no es vacía.*

2.° *Cada conjunto* A *de la familia* Π *que no es vacío, contiene al menos un punto de* D.

3.° *Si* A_1 *y* A_2 *pertenecen a* Π, *existe un* $A_3 \subset \Pi$ *tal que* $A_3 \subset A_1 \cap A_2$.

Es inmediato comprobar que estas condiciones las verifican las familias de entornos que utilizamos en la definición de límite de una función en R^n, así como también en el caso de sucesiones (en este último caso, los conjuntos A están formados por los entornos posteriores a uno fijado y la base de filtro se llama *de Fréchet).*

Una *función dirigida* (f, Π) es la asociación de una función f y una dirección Π definida en el dominio D de f. Con esto podemos dar la siguiente definición de límite:

Diremos que la función dirigida (f, Π) *tiene límite* k; *es decir,*

$$\lim_{x,\,\pi} f(\mathbf{x}) = k$$

si, fijado un entorno $E[k, \varepsilon]$, *se puede determinar un conjunto* $A \in \Pi$ *tal que para todo:*

$$\mathbf{x} \in A, \quad \text{es} \quad f(\mathbf{x}) \in E[k, \varepsilon]$$

El interés de esta generalización (*) está en que se pueden demostrar para ella todos los teoremas importantes de la teoría de límites. Daremos algunos como ejemplo:

1.° *Sean* f *y* g *dos funciones cuyos dominios son* D *y* F *y* Π *una dirección cuyos conjuntos están contenidos en* D *y en* F *y sea* $\lim_{x,\,\pi} f(\mathbf{x}) = k$. *Si existe un conjunto* A *en* Π *tal que* $f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})$ *para todo* $\mathbf{x} \in A$, *es* $\lim_{x,\,\pi} g(\mathbf{x}) = k$.

(*) Debida a Moore-Smith (1923) y Cartan (1934).

Si es $E(k, \varepsilon)$ un entorno de k, existe un conjunto $A_1 \in \Pi$, tal que:

$$f(\mathbf{x}) \subset E[k, \varepsilon]$$

para todo $x \in A_1$. Existe un $A_2 \subset \Pi \cap A_1$ y tal que $A_2 \in \Pi$. Entonces para todo:

$$\mathbf{x} \in A_2;\ f(\mathbf{x}) \in E[k, \varepsilon] \quad \text{y} \quad g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$$

luego:

$$\lim_{x,\pi} g(\mathbf{x}) = k \qquad \text{c.q.d.}$$

2.° *Una función dirigida* (f, Π) *no puede tener dos límites distintos* h, k.

Tomemos sendos entornos $E(h, \varepsilon)$, $E(k, \varepsilon)$ disjuntos.

Por ser h límite, existe un $A_1 \in \Pi$, tal que $f(\mathbf{x}) \in E(h, \varepsilon)$ para todo $\mathbf{x} \in A_1$.
Por ser k límite, existe un $A_2 \in \Pi$, tal que:

$$f(\mathbf{x}) \in E(k, \varepsilon)$$

para todo $\mathbf{x} \in A_2$. Entonces existe un $A_3 \in \Pi$, tal que $A_3 \subset A_1 \cap A_2$ y para todo $\mathbf{x} \in A_3$ debía ser simultáneamente $f(\mathbf{x}) \in E(h, \varepsilon)$ y $f(\mathbf{x}) \in E(k, \varepsilon)$, lo cual es imposible por ser estos entornos disjuntos.

Otras propiedades que se pueden demostrar sin dificultad son:

3.° *Si* (f, Π) *y* (g, Π) *son funciones dirigidas con el mismo dominio* D *y es:*

$$\lim_{x,\pi} f(\mathbf{x}) = h, \ \lim_{x,\pi} g(\mathbf{x}) = k$$

se verifica:

$$\lim_{x,\pi} [f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})] = h + k$$

$$\lim_{x,\pi} [cf(\mathbf{x})] = ch$$

$$\lim_{x,\pi} [f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{x})] = h \cdot k$$

$$\lim_{x,A} [f(\mathbf{x}) : g(\mathbf{x})] = h/k$$

en que las operaciones con los límites son las definidas en la recta completa $\overline{R}$.

Ejemplos interesantes son los siguientes:

1.°) Sea un conjunto $D \subset R^n$, y $\mathbf{a}$ un punto de D, la familia de entornos reducidos $E'(\mathbf{a}, \varepsilon) \cap D$ es una dirección Π en D y $\lim_{x,\pi} f(\mathbf{x})$ es el mismo concepto dado anteriormente como $\lim_{x \to a} f(\mathbf{x})$ para una función real de variable vectorial.

2.°) Si en las mismas condiciones tomamos entornos no reducidos $E(a, \varepsilon) \cap D$, tenemos también una dirección Π y se ve fácilmente que la existencia de $\lim_{a,\pi} f(\mathbf{x})$ coincide con la continuidad en **a**.

Otros ejemplos interesantes veremos al estudiar el concepto de integral de Riemann-Stieltjes.

EJERCICIOS

1. ¿En qué puntos es discontinua la función:

$$y = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1} ?$$

2. ¿En qué puntos es discontinua la función:

$$y = \frac{x - 1}{x - 2} ?$$

Representarla gráficamente:

3. Determinar los ceros y puntos de discontinuidad de la función:

$$y = \frac{3(2x - 2)(x^2 - 2x + 1)}{(4x^2 - 4x + 1)(x - 1)}$$

4. Probar que:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x \sqrt[3]{\cos x}} = 1$$

5. Probar que la función $y = \dfrac{1}{1 + x^2}$ es continua para todo valor finito de x.

6. Estudiar la función $y = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{1}{x}$.

7. Discutir la continuidad de las siguientes funciones:

$$y = \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x^2 + 1}} \qquad y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$y = \frac{1}{a^x - 1} \qquad y = l\,\frac{x + 2}{x^2 - 1}$$

8. Probar que la función $y = 4x^{1/2} - x$ es estrictamente creciente en $0 \leq x \leq 1$. Obtener la función inversa.

9. Si $f(x)$ es estrictamente monótona en (a, b) y toma una sola vez cada valor comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$, tal función es continua en (a, b).

CAPITULO **18**

Derivadas

1. CONCEPTO DE DERIVADA

La noción de derivada permite resolver una cuestión de importancia fundamental en todas las aplicaciones de las Matemáticas, a saber: dada una función, medir su variación en un intervalo o en un punto. Aclaremos esto con un ejemplo. Supongamos una calle recta (no horizontal) cuya sección por un plano vertical se representa en la figura 1. Esto es lo que se llama en Física un plano inclinado. Este plano forma con el horizontal un ángulo α, que se llama *inclinación* del plano. Al movernos sobre el plano o calle inclinada AB, cada vez que avancemos una longitud l en sentido horizontal, habremos ascendido una longitud l_1 en sentido vertical. Si consideramos otra longitud l' de avance horizontal y la correspondiente l'_1 vertical, serán iguales las razones.

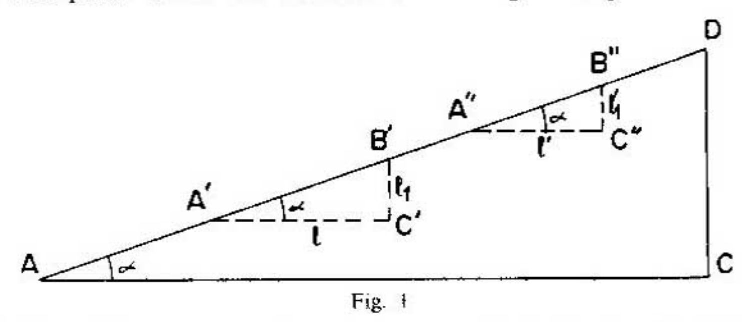


Fig. 1

$$\frac{l_1}{l} = \frac{l'_1}{l'}$$

por la semejanza de los triángulos $A'C'B'$ y $A''C''B''$ que se forman. Pues bien, al valor constante de estas razones, que es la tangente trigonométrica del ángulo α de inclinación, se llama *pendiente* del plano o de su sección.

Si la sección de la calle por un plano vertical no es una recta, sino una curva, ya no se verifica la propiedad de que la razón del incremento vertical al incremento horizontal es constante, sino que esta razón varía.

En este caso no se puede ya hablar de pendiente de la calle, sino que hay que referirse a la pendiente de la calle en un punto A (fig. 2). Podemos tomar otro B distante 100

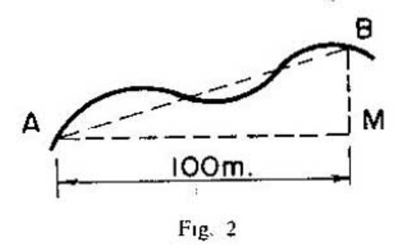


Fig. 2

metros de A sobre la horizontal, y el cociente $\frac{\overline{MB}}{\overline{AM}}$ de la diferencia de niveles por la distancia horizontal nos da una medida aproximada de la pendiente en A. Si queremos tener una idea más exacta de dicha pendiente, adoptaremos un intervalo más corto, por ejemplo, un metro, y formaremos el cociente análogo al anterior relativo a este intervalo o incremento horizontal. Si consideramos una sucesión de incrementos, cuyas amplitudes tengan por límite cero, tendremos en correspondencia con ellos una sucesión de pendientes cuyo límite es la pendiente en el punto A.

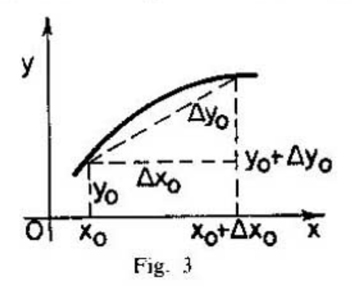


Fig. 3

Precisemos estas ideas: supongamos una función $y = f(x)$ continua en cierto intervalo abierto I y consideremos un valor x_0 de dicho intervalo y un incremento Δx_0 (positivo o negativo), que nos conduce a otro valor $x_0 + \Delta x_0$ del mismo intervalo (fig. 3).

Sea $y_0 = f(x_0)$ el valor de la función en x_0, y sea $y_0 + \Delta y_0 = f(x_0 + \Delta x_0)$ el que toma en $x_0 + \Delta x_0$.

Al incremento Δx_0, dado a x_0, corresponde en la función el incremento:

$$\Delta y_0 = f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0)$$

y el cociente de ambos,

$$\frac{\Delta y_0}{\Delta x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0)}{\Delta x_0}$$

que se llama *cociente incremental*, está completamente determinado para cada valor de Δx_0 (puesto que x_0 es fija) y mide la *variación* media de la función en el intervalo $(x_0, x_0 + \Delta x_0)$.

Se llama derivada de la función $y = f(x)$ en el punto $x = x_0$, al límite (si tal límite existe) del cociente incremental cuando $\Delta x_0 \to 0$. Se designa con las notaciones:

$$y' = f'(x_0) = Df(x_0) = \lim_{\Delta x_0 \to 0} \frac{\Delta y_0}{\Delta x_0} = \lim_{\Delta x_0 \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0)}{\Delta x_0}$$

EJEMPLO:

Sea calcular la derivada de la función $y = x^2$ en el punto $x_0 = 1$.

Para $x_0 = 1$, el valor de la función es $y_0 = 1^2 = 1$.

Para $x_0 + \Delta x_0 = 1 + \Delta x_0$, la función vale $y_0 = (1 + \Delta x_0)^2$; luego:

$$\Delta y_0 = (1 + \Delta x_0)^2 - y_0 = (1 + \Delta x_0)^2 - 1$$

y el cociente incremental es:

$$\frac{\Delta y_0}{\Delta x_0} = \frac{(1 + \Delta x_0)^2 - 1}{\Delta x_0} = \frac{2\Delta x_0 + (\Delta x_0)^2}{\Delta x_0} = 2 + \Delta x_0$$

Por tanto, la derivada, es decir, el límite de este cociente incremental, cuando $\Delta x_0 \to 0$, es:

$$y'_0 = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y_0}{\Delta x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} (2 + \Delta x_0) = 2$$

2. INTERPRETACION GEOMETRICA DE LA DERIVADA

Consideremos el diagrama cartesiano de la función $y = f(x)$. El cociente incremental:

$$\frac{\Delta y_0}{\Delta x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0)}{\Delta x_0} = \frac{\overline{MP}}{\overline{P_0M}}$$

tiene como representación geométrica la tangente trigonométrica del ángulo α' que forma el sentido de la cuerda P_0P (es decir, el sentido correspondiente a crecientes) con el sentido positivo del eje x; es decir:

$$tg\ \alpha' = \frac{\Delta y_0}{\Delta x_0} \qquad [1]$$

Si el ángulo α' es tal que $-\frac{\pi}{2} < \alpha' < \frac{\pi}{2}$ podemos escribir:

$$\alpha' = arc\ tg\ \frac{\Delta y_0}{\Delta x_0}$$

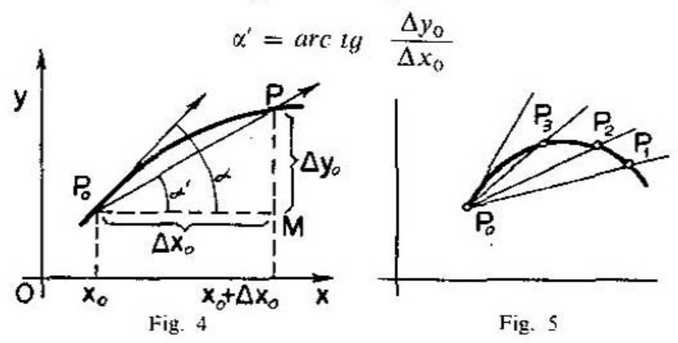


Fig. 4 Fig. 5

En efecto, en el triángulo rectángulo P_0MP, es:

$$tg\ \alpha' = \frac{\overline{PM}}{\overline{P_0M}} = \frac{\Delta y_0}{\Delta x_0}$$

Se llama tangente a una curva en un punto P_0, la recta límite (supuesta existente) de las secantes que pasan por P_0 y un punto variable P, al tender P a confundirse con P_0.

Si existe límite del segundo miembro de [1] resulta en virtud de la continuidad de la función *arc tg* que es:

$$\lim_{\Delta x_0 \to 0} \alpha' = arc\ tg\ f'(x_0) = \alpha$$

Hemos probado, así que:

Si en x_0 existe derivada, existe tangente a la curva en el punto correspondiente y la pendiente de esta tangente es, precisamente la derivada.

Recíprocamente, si existe tangente en P_0 existe $\lim \alpha' = \alpha$, y como la función tg es continua en el intervalo $(-\pi/2, +\pi/2)$, es también $\lim\ tg\ \alpha' = tg\ \alpha$ y existirá límite del segundo miembro de [1] y será igual a aquel, o sea:

$$\lim_{\Delta x_0 \to 0} \frac{\Delta y_0}{\Delta x_0} = \lim_{\Delta x_0 \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0)}{\Delta x_0} = tg\ \alpha$$

es decir:

$$f'(x_0) = tg\ \alpha$$

Luego *si la curva tiene tangente en un punto P, de abscisa x_0, posee derivada en x_0 la función $y = f(x)$.*

Hemos, pues, probado que el problema geométrico de la tangente coincide con el problema analítico de la determinación de la derivada.

3. ECUACION DE LA TANGENTE A UNA CURVA

Obtenida la derivada $f'(x_0)$ en un punto x_0, se puede obtener inmediatamente la ecuación de la tangente a la curva en el punto de abscisa x_0. Como las coordenadas de este punto son $[x_0, f(x_0)]$ y la pendiente de la tangente es $f'(x_0)$, la ecuación de la tangente será:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \qquad [7]$$

EJEMPLO:

Vimos que la derivada de la función $y = x^2$ en el punto de abscisa 1 es 2; ésta es, pues, la pendiente de la tangente a la parábola $y = x^2$ en el punto de coordenadas (1, 1), y su ecuación será:

$$y - 1 = 2(x - 1)$$

4. LA FUNCION DERIVADA

Al calcular las derivadas nos hemos fijado siempre en un punto particular x_0. Si calculamos la derivada (supuesta existente) en cada uno de los puntos en que está definida la función, y hacemos corresponder a cada valor x la correspondiente derivada $f'(x)$, obtenemos una nueva función $y' = f'(x)$ llamada la *función derivada.*

Calculada $f'(x)$, si se quiere el valor de la derivada en el punto x_0, basta dar este valor particular a x, y el valor $f'(x_0)$ que resulta, es el buscado.

EJEMPLOS:

1. Cálculo de la función derivada de la función $y = x^2$.

Partiendo de un valor x cualquiera, tenemos:

$$y = x^2, \qquad y + \Delta y = (x + \Delta x)^2$$

de donde:

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - x^2 = 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$$

Por tanto, el cociente incremental es:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$

cuyo límite para $\Delta x \to 0$ es la derivada; luego:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$$

Si se quiere la derivada para $x = 1$, basta dar ese valor a x, y resulta: $y' = 2 \cdot 1 = 2$. Análogamente, para $x = 2$ es $y' = 2 \cdot 2 = 4$.

5. OTRAS INTERPRETACIONES DE LA DERIVADA

Multitud de nociones de la Física, la Química, la Técnica, la Economía, etc., adoptan una expresión precisa, gracias al concepto de derivada.

a) *Velocidad de un móvil.*—Consideremos el movimiento de una partícula P sobre una recta AB (fig. 6); por ejemplo, un automóvil en una carretera rectilínea. Todos sabemos que si decimos que hemos hecho un recorrido de 350 *km.* a 50 *km.* por hora, esto no quiere decir que durante todo el trayecto el automó-

s Δs
A P P' B

Fig. 6

vil haya tenido una marcha uniforme, sino que hemos recorrido 350 *km* marchando unas veces más de prisa y otras más despacio, pero empleando, en total, siete horas. Esto se expresa diciendo que la:

$$\text{velocidad media} = \frac{\text{espacio recorrido}}{\text{tiempo empleado}}$$

ha sido de 50 *km.* por hora. Si consideramos un intervalo parcial, por ejemplo, los últimos 100 *km.*, la velocidad media será posiblemente diferente.

En general, si consideramos a partir de un punto A el espacio $s = AP$ recorrido en un tiempo t, dicho espacio será función de t y podremos escribir $s = f(t)$.

Si a partir de un instante t_0 consideramos un incremento Δt de tiempo y el correspondiente incremento de espacio Δs, recorrido por el móvil en el tiempo Δt, se llama *velocidad* media del móvil en dicho intervalo o incremento de tiempo, al cociente:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

El movimiento se dice *uniforme* cuando este cociente es constante, cualquiera que sea Δt.

Si el movimiento no es uniforme, este cociente varía, y a su límite:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = v$$

se le llama *velocidad* del móvil en el instante t.

Vemos, pues, que la velocidad *es la derivada del espacio respecto del tiempo.*

b) *Aceleración.*—Sabemos que cuando un movimiento aumenta rápidamente de velocidad se dice que tiene una fuerte *aceleración.*

El límite del cociente del incremento de la velocidad por el incremento del tiempo:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

se llama *aceleración* del movimiento y es, por tanto, la derivada de la velocidad respecto del tiempo. También puede decirse que la aceleración es la derivada

segunda del espacio respecto del tiempo, ya que es la derivada de la derivada, es decir, resulta derivando dos veces sucesivamente.

En general, para cualquier fenómeno cuyos estados se puedan medir por números y que dependan del tiempo t: $y = f(t)$ (por ejemplo, movimiento de rotación de un sólido, temperatura de un cuerpo, altura de un avión, etc.), se puede definir la velocidad de variación como:

$$\lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

y, por tanto, estos conceptos físicos tienen su definición correcta mediante la noción de derivada.

Otro tanto podríamos repetir de funciones cuya variable independiente no es el tiempo, pero que también se reducen a la noción de derivada. Así, el peso específico, el calor específico, la concentración de una disolución, la dilatación de una barra, la carga de una viga, la velocidad de reacción química, etc.

En Economía la derivada juega un importante papel y hasta ha recibido el nombre de *función marginal*.

6. TABLA Y CALCULO DE DERIVADAS

El lector puede obtener fácilmente como ejercicio los resultados que se resumen en la siguiente tabla:

Función $= f(x)$	Derivada $= f'(x)$	Función $= f(x)$	Derivada $= f'(x)$
constante	0	arc cos x	$-\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
x	1		
x^m	mx^{m-1}		
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	arc tg x	$\dfrac{1}{1 + x^2}$
sen x	cos x	arc ctg x	$\dfrac{-1}{1 + x^2}$
cos x	$-$ sen x		
tg x	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	ar sh x	$\dfrac{1}{+\sqrt{x^2 + 1}}$
ctg x	$-\dfrac{1}{\text{sen}^2 x}$	ar ch x	$\dfrac{1}{\pm\sqrt{x^2 - 1}}$

Función $= f(x)$	Derivada $= f'(x)$	Función $= f(x)$	Derivada $= f'(x)$
$\text{sh } x$	$\text{ch } x$	$\text{ar tgh } x$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\text{ch } x$	$\text{sh } x$		
$\text{th } x$	$\frac{1}{\text{ch}^2 x}$	$\text{ar ctgh } x$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\text{ctgh } x$	$\frac{-1}{\text{sh}^2 x}$	$u(x) \pm v(x)$	$u'(x) \pm v'(x)$
		$u(x) \cdot v(x)$	$u'v + uv'$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\frac{u(x)}{v(x)}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x} \log_a e$	$u[v(x)]$	$u'(v) \cdot v'(x)$
a^x	$a^x \ln a$	$\ln u(x)$	$\frac{u'}{u}$
e^x	e^x	$a^{u(x)}$	$a^u \cdot u' \cdot \ln a$
$\text{arc sen } x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$u(x)^\mu$	$\mu u^{\mu-1} \cdot u'$

Las reglas anteriores permiten de un modo sencillo obtener la derivada de cualquier función, de las que hemos llamado elementales formadas a partir de la variable y constantes mediante un número finito, de los que hemos llamado operaciones analíticas fundamentales.

Para esto basta tener en cuenta las siguientes reglas de cálculo de inmediata demostración:

a) $$D[f \pm g] = Df \pm Dg$$

b) $$D[f \cdot g] = fD[g] + gD[f]$$

c) $$D[f : g] = [gDf - fDg] : g^2$$

d) *Derivada de la función de función.*—Supongamos que la función $y = f(u)$ es continua y derivable para $u = u_0$, y que $u = \phi(x)$ es continua y derivable para $x = x_0$, y que $u_0 = \phi(x_0)$. Vamos a demostrar que para $x = x_0$ es:

$$Df(\phi(x)) = D_u f(u) \cdot D_x \phi(x)$$

Se tiene:

$$\Delta y = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \Delta u$$

o lo que es lo mismo:

$$\Delta y = (f'(u) + \varepsilon) \cdot \Delta u \qquad [1]$$

en que ε es un infinitésimo. Cuando $\Delta x \to 0$, $\Delta u \to 0$, $\Delta y \to 0$, y puede ocurrir que Δu se anule infinitas veces en todo entorno del punto correspondiente a $\Delta x = 0$; pero también en este caso es válida la relación [1] que queda reducida a $\Delta y = 0$, así como la siguiente deducida de ella dividiendo por Δx:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = (f'(u) + \varepsilon) \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

Tomando límites para $\Delta x \to 0$ queda la relación indicada, que podemos enunciar así:

Si es $y = f(u)$, siendo $u = \phi(x)$, es decir, $y = f(\phi(x))$, la derivada de y respecto de x es el producto de la derivada de y respecto de u por la derivada de u respecto de x.

Con el mismo razonamiento se prueba, más en general, que si $y = f(u)$, $u = \phi(\xi)$, $\xi = \psi(x)$, es:

$$D\{ f[\phi(\psi(x))] \} = D_u f \cdot D_\xi \phi \cdot D_x \psi$$

EJEMPLOS:

1) $$D(ln \cdot cos\ x) = \frac{1}{cos\ x}(-\ sen\ x) = -\ tg\ x$$

2) $$D(ln \cdot x^n) = \frac{1}{x^n} \cdot (nx^{n-1}) = \frac{n}{x}$$

e) *Derivada logarítmica.*—Se llama derivada logarítmica de una función $y = f(x)$ la derivada de su logaritmo. En virtud de la regla anterior se tiene:

$$D\ ln\ f(x) = f'(x) \cdot \frac{1}{f(x)}$$

EJEMPLO:

1) Para hallar la derivada de la función:

$$y = 4x^3 + 3 \cos x \cdot \ln x - x^4/\text{sen } x$$

tendremos primero en cuenta que es una suma y que la derivada es la suma de las derivadas de cada uno de los sumandos.

La derivada del primer sumando es $4 \cdot 3x^2 = 12x^2$.

El segundo término es un producto y su derivada es:

$$-3 \text{ sen } x \cdot \ln x + 3 \cos x \cdot \frac{1}{x}$$

El tercer sumando es un cociente y su derivada es:

$$\frac{4x^3 \cdot \text{sen } x - x^4 \cos x}{\text{sen}^2 x}$$

Por consiguiente:

$$y' = 12x^2 - 3 \text{ sen } x \cdot \ln x + 3 \cos x \cdot \frac{1}{x} - \frac{4x^3 \text{ sen } x - x^4 \cos x}{\text{sen}^2 x}$$

2. Supongamos la función $y = \ln \cos (x^2 + 1)$.

Como es función de función, se tiene:

$$y' = \frac{1}{\cos (x^2 + 1)} [- \text{ sen } (x^2 + 1)] \cdot 2x$$

7. DERIVADAS SUCESIVAS

Si la derivada $y' = f'(x)$ de la función $y = f(x)$ es derivable, a la derivada de $f'(x)$ se la llama *derivada segunda* de $f(x)$, y se escribe:

$$y'' = f''(x) = D^2 f(x) = \ddot{y}$$

Análogamente se definen las derivadas tercera, cuarta, ..., n-sima, y se denotan:

$$f'''(x), \qquad f^{IV}(x), \ldots, f^{(n}(x)$$

Las derivadas sucesivas de $y = sen\ x$ son:

$$cos\ x, \qquad - sen\ x, \qquad - cos\ x, \qquad sen\ x, \ \ldots$$

Las derivadas sucesivas de e^x son:

$$e^x, \qquad e^x, \qquad e^x \ldots$$

Las derivadas sucesivas de x^4 son:

$$4x^3, \qquad 4 \cdot 3x^2, \qquad 4 \cdot 3 \cdot 2x, \qquad 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1, \ 0$$

Para la derivada n-sima de un producto $y = u \cdot v$ se obtiene fácilmente la llamada fórmula de Leibnitz:

$$y^{(n} = u^{(n} \cdot v + n \cdot u^{(n-1} \cdot v + \binom{n}{2} u^{(n-2} \cdot v'' + \ldots + u \cdot v^{(n}$$

6. GENERALIZACIONES DE LA DERIVADA

Se puede considerar límites laterales en el cociente de incrementos. Así si existe el $\lim_{h \to +0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ decimos que existe la *derivada lateral a la derecha*, que designaremos por $f'(x_0 + 0)$. Análogamente la *derivada lateral a la izquierda* se designa por $f'(x_0 - 0)$.

Se puede admitir en la definición de derivada que el límite del cociente incremental sea $+\infty$, o bien, $-\infty$, diciéndose en estos casos que la *derivada es infinita.*

Por ejemplo, la derivada de la función $y = 3\sqrt[3]{x}$ en el punto $x = 0$ es $+\infty$, pues, se tiene:

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2 = +\infty$$

Geométricamente, esto quiere decir que la posición límite de las cuerdas que unen 0 con puntos próximos es una recta que forma un ángulo $+\pi/2$ con el semieje $+x$, es decir, la dirección positiva de la tangente es el semieje $+y$.

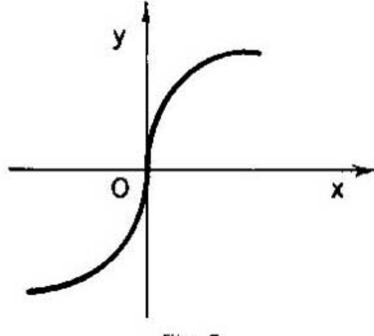


Fig. 7

EJERCICIOS

1. Calcular las siguientes derivadas:

$$D(3x^2 + x - 1)$$

$$D[(x - 1)(x + 1)]$$

$$D\sqrt{x^2 - x + 1}$$

$$D\sqrt{x^2 - 1}$$

2. Calcular las siguientes derivadas:

$$D(x^5 + x^{-5} + x^3 + x^{-3}) \quad \text{para } x = 2$$

$$D\left(x + \frac{1}{x} + x^2 + \frac{1}{x^2}\right) \quad \text{para } x = 1$$

$$D(e^x \cos x) \quad \text{para } x = 1$$

$$D(\operatorname{sen} x \cos x) \quad \text{para } x = \frac{\pi}{2}$$

3. Derivada de un determinante.

Sea:

$$y(x) = \begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

Cada término del desarrollo es de la forma $a_{1i}(x)\, a_{2j}(x) \dots a_{nk}(x)$ y, al derivar, de este sumando resultan n:

$$a'_{1i}(x)\, a_{2j}(x) \dots a_{nk}(x) + a_{1i}(x)\, a'_{2j}(x) \dots a_{nk}(x) + \dots + a_{1i}(x)\, a_{2j}(x) \dots a'_{nk}(x)$$

Agrupando los primeros términos de estas expresiones se tiene un determinante que sólo difiere del dado en tener acentuada la primera columna; y haciendo lo mismo con los segundos, terceros, etc., se ve que:

La derivada de un determinante es la suma de los determinantes obtenidos sustituyendo cada columna por la formada derivando sus elementos.

4. Calcular las derivadas de los determinantes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & x^3 \\ 1 & x^2 & 1 \\ x & 1 & 1 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1-x & 2 & 3 \\ 2 & 3-x & 4 \\ 3 & 4 & 3-x \end{vmatrix}$$

CAPITULO **19**

Propiedades de las funciones derivables

1. CONTINUIDAD Y DERIVABILIDAD

Una función $f(x)$ que tiene derivada finita en x_0 es continua en este punto.

Pues si es:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

se tiene:

$$\lim_{h \to 0} [f(x_0 + h) - f(x_0)] = \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \cdot h \right] =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \cdot \lim_{h \to 0} h = f'(x_0) \cdot 0 = 0$$

luego la función es continua.

El teorema recíproco no es cierto. Consideremos, en efecto, la función

$$f(x) = x \; sen \frac{1}{x} \text{ para } x \neq 0, f(0) = 0$$

que es continua en $x = 0$, pero no es derivable, pues:

$$\frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \text{sen} \frac{1}{h}$$

que carece de límite cuando $h \to 0$. Otro ejemplo de función continua en un punto que carece de derivada en el mismo es la $y = |x|$, aunque en

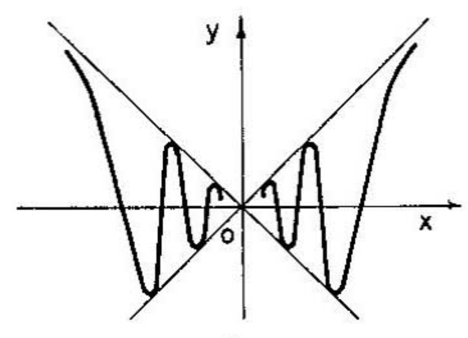


Fig. 1

este caso existen las derivadas laterales. Existen ejemplos de funciones continuas en un intervalo que carecen de derivada en todos los puntos del mismo (*).

2. CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO. MAXIMOS Y MINIMOS

Ya dijimos que las derivadas se han introducido en la Matemática para estudiar la variación de las funciones.

Recordando las definiciones de máximos y mínimos relativos, y de puntos de crecimiento y decrecimiento, podemos enunciar el siguiente

TEOREMA. *Si $f'(x_0) > 0$, x_0 es un punto de crecimiento y si $f'(x_0) < 0$, x_0 es un punto de decrecimiento.*

Si $f'(x_0) > 0$ y es a un número tal que $0 < a < f'(x_0)$, para $|h|$ suficientemente pequeño es:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} > a > 0$$

Luego, si $h > 0$, es $f(x_0 + h) - f(x_0) > 0$, y si $h < 0, f(x_0 + h) - f(x_0) < 0$, es decir, se trata de un punto de crecimiento. Análogamente, el otro caso.

COROLARIO. *Es condición necesaria para que una función derivable tenga un másimo o mínimo en un punto x_0, que sea $f'(x_0) = 0$, es decir, que la tangente en el punto correspondiente de la curva sea horizontal (paralela al eje x).*

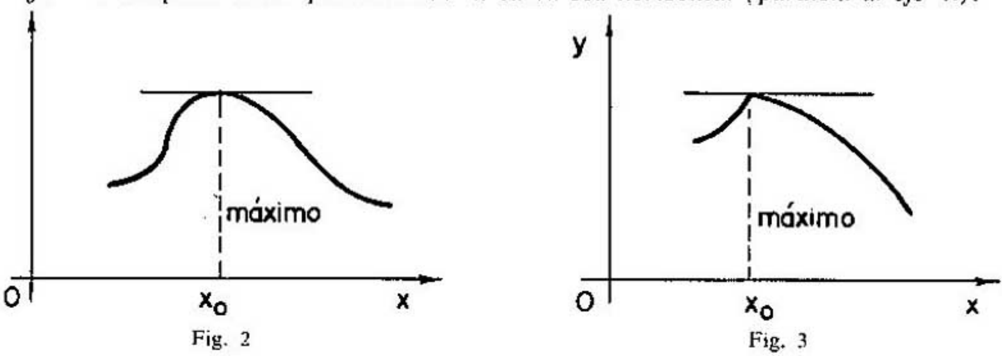


Fig. 2 Fig. 3

Pues si fuera $f'(x_0) \neq 0$, el punto sería de crecimiento o de decrecimiento.

Desde luego, *si la función no es derivable*, puede existir un mínimo o máximo, sin que se verifique la condición anterior, como se ve claramente en el ejemplo

(*) Véase S. Rios, *Teoría de la Integral*, Madrid, 1942.

de la figura 2. Los puntos en que hay máximo o mínimo habrán de encontrarse: 1.° entre los puntos en que $f'(x) = 0$; 2.° entre los puntos en que no existe $f'(x)$.

Es interesante observar que la condición anterior no es suficiente, como lo prueba el ejemplo de la función $f(x) = x^3$, cuya derivada $f'(0) = 0$, y, sin embargo, $f(x)$ es creciente en $x = 0$ (fig. 3). Tal punto, en que la curva atraviesa a la tangente, es decir, tal que hay puntos de la curva a un lado y otro de la tangente, se llama *punto de inflexión* (fig. 4).

Los máximos y mínimos se llaman, *valores extremales.*

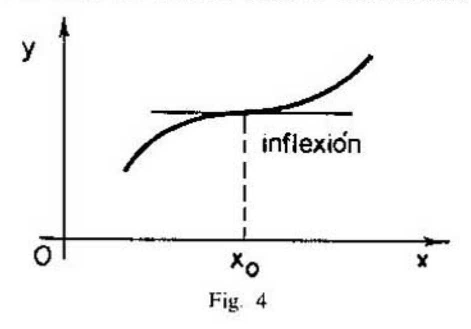


Fig. 4

3. TEOREMA DE ROLLE

Si $f(x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en el intervalo (a, b) y toma en los extremos del intervalo valores iguales, existe un punto ξ del intervalo, tal que $f'(\xi) = 0$.

Sea $f(a) = f(b)$. Como $f(x)$ es continua en $[a, b]$ en virtud del teorema de Weierstrass, posee un máximo y un mínimo absolutos.

Si ambos son tomados en los extremos del intervalo, la función es constante en todo el intervalo, y el teorema es evidente. Si uno de dichos máximo o mínimo lo toma en un punto interior, es, a la vez, máximo o mínimo relativo (*), y en él es nula la derivada.

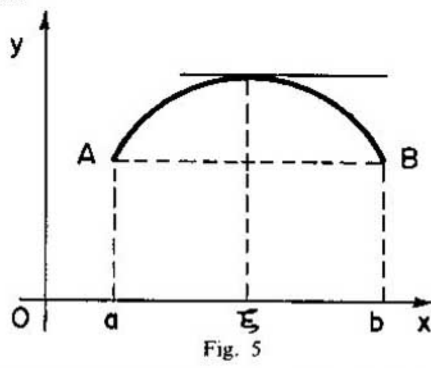


Fig. 5

(*) Es una consecuencia de la definición. En cambio, si un máximo (o mínimo) absoluto lo tiene una función en un extremo del intervalo, en que está definida, dicho máximo puede no ser relativo.

Geométricamente, el teorema de ROLLE expresa que en el arco existe un punto cuya tangente es paralela al eje x.

4. TEOREMA DEL VALOR MEDIO

Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), existe un punto $\xi \in (a, b)$ tal que:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$$

La interpretación geométrica del teorema es que *en todo arco de curva uniforme con tangente en todos sus puntos, hay un punto al menos con tangente paralela a la cuerda.*

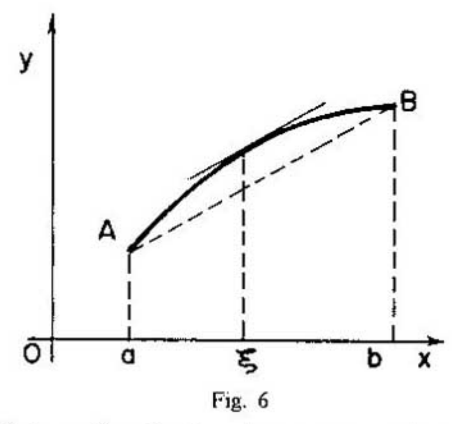


Fig. 6

Si restamos de $f(x)$ una función lineal que tome en los puntos a y b los valores $f(a)$ y $f(b)$, obtendremos una función a la que es aplicable el teorema de Rolle.

Tenemos así:

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(a)$$

tal que $g(b) = g(a) = 0$ y aplicando el teorema de Rolle:

$$g'(\xi) = 0, \text{ es decir, } f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad \text{(Lagrange)}$$

Si llamamos x, $x + h$ a los extremos del intervalo, un número intermedio ξ, será de la forma $\xi = x + \theta h (0 < \theta < 1)$, y el teorema se expresa en la siguiente forma:

$$f(x + h) - f(x) = hf'(x + \theta h)$$

5. ERROR DE UNA FUNCION

Supongamos una función $y = f(x)$ y que hemos calculado el valor $y_0 = f(x_0)$ y que nos interesa conocer el error cometido en $f(x)$ al cometer un error Δx_0 en la variable. Es decir, no se conoce x_1, exactamente, sino que se conoce un valor aproximado x_0, y se trata de calcular mediante el teorema de Lagrange el error:

$$f(x_1) - f(x_0) = f'(\xi)(x_1 - x_0)$$

Si sabemos que en el intervalo (x_0, x_1) la derivada es acotada $|f'(\xi)| < k$, tendremos para cota del error:

$$|f(x_1) - f(x_0)| < k \cdot |x_1 - x_0|$$

EJEMPLO:

Como la derivada de $ln\ x$ es $1/x$, tendremos:

$$|ln\ x_1 - ln\ x_0| < k \cdot |x_1 - x_0|$$

y si suponemos que x_1 y x_0 son > 1.000, será $k < \dfrac{1}{1.000}$, es decir:

$$|ln\ 1.001 - ln\ 1.000| < 0{,}001$$

6. FUNCIONES CONVEXAS

Un conjunto C de puntos (x, y) del plano R^2 se dice *convexo* si al pertenecer al conjunto los puntos (x_1, y_1), (x_2, y_2) también pertenecen todos los puntos del segmento rectilíneo que los une, a saber, los puntos $(\alpha\ x_1 + (1 - \alpha)\ x_2;\ \alpha\ y_1 + (1 - \alpha)\ y_2)$ para todo α tal que $0 < \alpha < 1$.

Una función $y = f(x)$ definida en el intervalo I se dice *convexa* si el conjunto de puntos (x, y) tales que $y > f(x)$ es convexo; es decir, si se verifica:

$$f(\alpha\ x_1 + (1 - \alpha)\ x_2) < \alpha\ f(x_1) + (1 - \alpha)\ f(x_2)$$

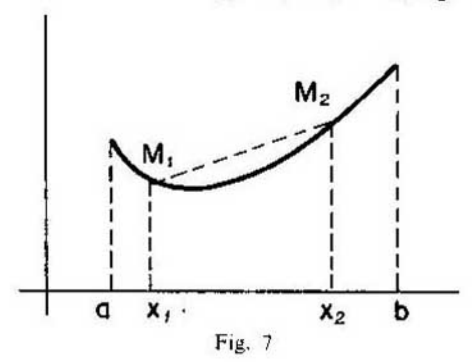


Fig. 7

Geométricamente esta propiedad expresa que si M_1 y M_2 son dos puntos de la curva, ningún punto del arco comprendido entre ellos puede estar encima del segmento M_1 y M_2.

Se demuestran fácilmente las siguientes propiedades:

a) *Toda función convexa es continua en todo punto interior al intervalo en que está definida.*

b) *Toda función convexa tiene derivadas laterales en todo punto interior a I.*

c) *Para que una función derivable en un intervalo I sea convexa, es necesario y suficiente que la derivada sea función creciente.*

d) *Una condición suficiente para que una función que admite derivada segunda en I sea convexa, es que dicha derivada sea positiva.*

EJERCICIOS

1. Calcular el valor de θ en el teorema de Lagrange para las funciones:

$$f(x) = \sqrt{x}, \qquad f(x) = \ln x, \qquad f(x) = \log x$$

2. Calcular $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$ para $x = \pi$, tomando $\pi \sim 3{,}14$. Acotar el error cometido.

3. Calcular $f(x) = \dfrac{1 + \ln x}{2x^2}$ para $x = e$, tomando $e \sim 2{,}71$, y acotar el error.

4. Aplicar a la función $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2} - 1$ la fórmula de los incrementos finitos para $x = 2$, $h = 1$, determinar θ.

5. Dar ejemplos de funciones con máximos relativos sin ser $f'(x) = 0$.

6. Probar que el recinto intersección de dos recintos convexos lo es también.

Ejemplos.

CAPITULO **20**

Fórmula de Taylor. Aplicaciones

1. FORMULA DE TAYLOR

Hemos visto en el teorema del valor medio como se expresa el valor de una función en la forma:

$$f(b) = f(a) + (b - a) f'(\xi)$$

es decir, suma del valor en otro punto más un término complementario.

Vamos a ver como esta expresión se puede generalizar mediante el siguiente teorema:

Si $f(x)$ es derivable hasta el orden $n - 1$ en $[a, b]$ y es tal que existe $f^{(n}(x)$ en (a, b) se puede expresar $f(b)$ en forma de un polinomio de grado $n - 1$ en $(b - a)$ más un término complementario; a saber:

$$f(b) = f(a) + \frac{(b - a)}{1!} f'(a) + \frac{(b - a)^2}{2!} f''(a) + \dots +$$

$$\frac{(b - a)^{n-1}}{(n - 1)!} f^{(n-1}(a) + \frac{(b - a)^n}{n!} f^{(n}(\xi) \qquad [1]$$

en que $a < \xi < b$.

Es decir, se expresa el valor de la función en un punto b por un polinomio en potencias de $b - a$ más un término complementario.

Recordemos que la manera de reducir la demostración del teorema del valor medio al teorema de Rolle era considerar la función:

$$g(x) = f(x) - f(a) - \lambda(x - a)$$

dando a λ un valor conveniente para que fuera $g(a) = g(b) = 0$.

Ahora ponemos análogamente:

$$g(x) = f(x) - f(a) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k}(a)}{k!} (x - a)^k - \lambda(x - a)^n \qquad [2]$$

en que λ es una constante que vamos a determinar por la condición $g(b) = 0$, ya que $g(a) = 0$. El teorema de Rolle vale en tal caso y existirá un ξ_1, tal que $a < \xi_1 < b$, en el cual $g'(\xi_1) = 0$.

Como:

$$g'(x) = f'(x) - f'(a) - \frac{f''(a)}{1}(x - a) - \dots$$

$$- \frac{f^{n-1}(a)}{(n-2)!}(x - a)^{n-2} - \lambda n(x - a)^{n-1} \qquad [3]$$

y es $g'(a) = 0$, $g'(\xi_1) = 0$, resulta que podemos aplicar nuevamente el teorema de Rolle y tendremos que en un punto ξ_2, tal que $\xi_1 < \xi_2 < b$, será $g''(\xi_2) = 0$. Continuando así llegamos a probar que:

$$g^{(n-1}(x) = f^{(n-1}(x) - f^{(n-1}(a) - \lambda n!(x - a)$$

se anula para un valor $\xi_{n-1} \neq a$ y contenido en (a, b), de donde:

$$\lambda = \frac{f^{(n-1}(\xi_{n-1}) - f^{(n-1}(a)}{n!(\xi_{n-1} - a)} \qquad [4]$$

Aplicando nuevamente el teorema de Rolle, resulta:

$$\lambda = \frac{f^{(n}(\xi)}{n!}, \ (a < \xi < b)$$

Obtendremos así de [2] para $x = b$ la fórmula Taylor [1] con el llamado resto de Lagrange.

De la fórmula [4] resulta que si hacemos $b \to a$, $\xi_{n-1} \to a$ y

$$lim \frac{1}{n!} \frac{f^{(n-1}(\xi_{n-1}) - f^{(n-1}(a)}{\xi_{n-1} - a} = \frac{1}{n!} f^{(n}(a)$$

luego:

$$\lambda = \frac{f^{(n}(a)}{n!} + \delta_n(b) \text{ en que } \lim_{b \to a} \delta_n(b) = 0$$

Tenemos así una *segunda forma de la fórmula de Taylor para una función $f(x)$, válida para un entorno de a, suponiendo que exista y sea finita $f^{(n}(a)$. Tal fórmula es:*

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1!} f'(a) + \dots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1}(a) + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n}(a) +$$

$$+ \frac{(x-a)^n}{n!} \phi_n(x) \qquad [5]$$

en que $\phi_n(x) \to 0$ cuando $x \to a$.

Si hacemos $b = a + h$, la fórmula [1] adopta la siguiente expresión:

$$f(a + h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} h + \frac{f''(a)}{2!} h^2 + \dots + \frac{f^{(n-1}(a)}{(n-1)!} h^{(n-1} + \frac{f^{(n}(a + \theta h)}{n!} h^n$$

Haciendo $a = 0$, queda:

$$f(h) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} h + \frac{f''(0)}{2!} h^2 + \dots + \frac{f^{(n-1}(0)}{(n-1)!} h^{n-1} + \frac{f^{(n}(\theta h)}{n!} h^n$$

que es la *fórmula de Mac-Laurin.*

EJERCICIOS

1. Supongamos que queremos aproximar la función e^x por un polinomio de segundo grado.

Como las derivadas son todas e^x, aplicando la fórmula de *Mac-Laurin*, se tendrá:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3 e^{\theta x}}{3!}$$

Luego, obtenemos como valor aproximado de e^x:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2}$$

con error:

$$\varepsilon = \frac{x^3 e^{\theta x}}{3!}$$

2. Supongamos que se trata de aproximar por un polinomio de segundo grado la función $f(x) = \cos x$.

Las cuatro primeras derivadas son:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\operatorname{sen} x \\ f''(x) &= -\cos x \\ f'''(x) &= \operatorname{sen} x \\ f^{IV}(x) &= \cos x \end{aligned}$$

y como para $x = 0$ valen:

$$f'(0) = 0; \qquad f''(0) = -1; \qquad f'''(0) = 0$$

aplicando la fórmula de *Mac-Laurin*, se tendrá:

$$\cos x = 1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^4}{4!} \cos(\theta x)$$

luego, como valor aproximado de cos x, se tiene:

$$\cos x \simeq 1 - x^2/2!$$

y el error cometido es:

$$\varepsilon = \frac{x^4}{4!} \cos(\theta x)$$

2. DETERMINACION DE MAXIMOS Y MINIMOS

Hemos probado que es condición necesaria para que la *función derivable* $f(x)$ (*) tenga un máximo relativo en el punto a, que sea $f'(a) = 0$; luego, los puntos entre los que habremos de buscar los máximos y mínimos de la función son, precisamente las raíces de la ecuación $f'(x) = 0$.

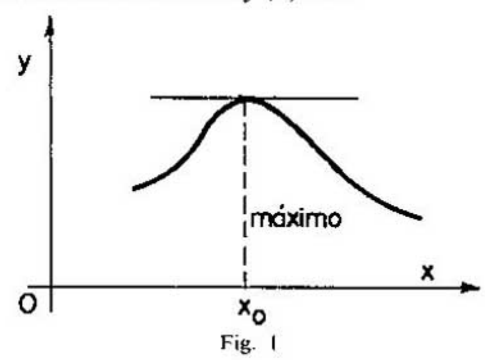


Fig. 1

Sea a uno de estos puntos, por ser $f'(a) = 0$, el desarrollo tayloriano de la función en la proximidad de dicho punto es:

$$f(a + h) = f(a) + h^2 \frac{f''(a)}{2!} + \dots + h^n \frac{f^{(n)}(a + \theta h)}{n!}$$

y suponemos que son nulas las derivadas:

$$f''(a); \quad f'''(a); \quad \dots; \quad f^{(n-1)}(a),$$

queda:

$$f(a + h) - f(a) = h^n \frac{f^{(n)}(a + \theta h)}{n!}$$

(*) El estudio de los extremos correspondientes a puntos en que no hay derivada, tiene un gran interés en las aplicaciones, pero sale del estudio elemental.

Tomando h suficientemente pequeño, $f^{(n)}(a + \theta h)$ tiene el mismo signo que $f^{(n)}(a)$; luego, si n es par, $f(a + h) - f(a)$ tiene el mismo signo que $f^{(n)}(a)$, sea $h < 0$ o $h > 0$, y si n es impar, $f(a + h) - f(a)$ tienen signos opuestos, según que h sea mayor o menor que cero. Podemos, pues, enunciar la siguiente regla:

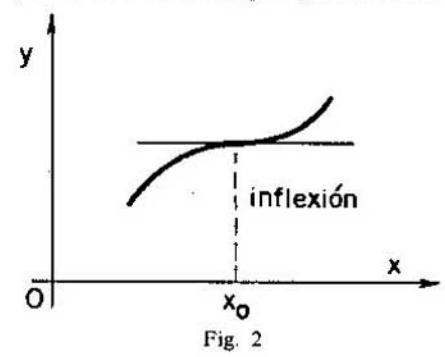


Fig. 2

Los máximos y mínimos de una función derivable se encuentran entre las raíces de su derivada. Sea a una raíz. Se sustituye en las derivadas sucesivas. Si la primera no nula es de orden impar, no hay extremo. Si es de orden par, hay máximo si es negativa y hay mínimo si es positiva.

EJEMPLO:

Hallar los máximos y mínimos de la función:

$$y = (x - 3)^4(x - 1)$$

La primera derivada es:

$$y' = 4(x - 3)^3(x - 1) + (x - 3)^4 = (x - 3)^3(5x - 7)$$

Los valores que anulan esta derivada son:

$$x = 3; \qquad x = 7/5$$

La derivada segunda es:

$$y'' = 3(x - 3)^2(5x - 7) + 5(x - 3)^3 = (x - 3)^2(20x - 36)$$

que para $x = 3$ se anula también, y para el valor $x = 7/5$ es negativa; luego, en este punto hay máximo.

Para ver si en el punto $x = 3$ hay máximo o mínimo, formamos las derivadas tercera y cuarta:

$$y^{III} = 2(x - 3)(20x - 36) + 20(x - 3)^2 = (x - 3)(60x - 132)$$

$$y^{IV} = (60x - 132) + 60(x - 3)$$

Para $x = 3$ la tercera es nula y la cuarta es positiva; luego, como la primera derivada, que es distinta de cero, es de orden par y positiva, hay mínimo.

3. CONCAVIDAD Y CONVEXIDAD

Hemos expuesto la discusión relativa a los máximos y mínimos, que no es otra cosa que estudiar la posición de la curva representativa de la función $y = f(x)$ en el entorno de un punto x en que la tangente es paralela al eje x.

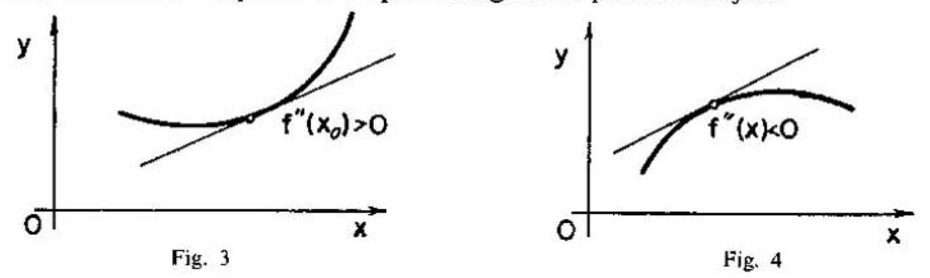


Fig. 3 Fig. 4

Vamos a generalizar ahora este estudio al caso de que la tangente no sea paralela a los ejes.

En el entorno del punto a podemos suponer:

$$f(x) = f(a + h) = f(a) + hf'(a) + h^2 \frac{f''(\xi)}{2!}$$

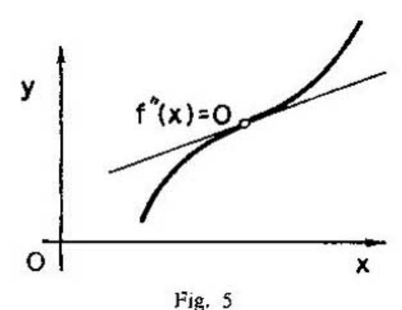


Fig. 5

Tomando los dos primeros términos, tenemos:

$$y = f(a) + hf'(a), \qquad \text{o bien:} \qquad y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

ecuación que representa una recta cuyo coeficiente es $f'(a)$ y pasa por el punto de la curva de abscisa a; luego, es la tangente en dicho punto.

La diferencia entre la ordenada de la curva y la de la tengente es:

$$h^2 \frac{f''(\xi)}{2!}$$

Si es $f''(\xi) > 0$ a la derecha y a la izquierda de a, la curva está por encima de la tengante en el entorno, y se dice *convexa*. Esto ocurre en virtud de la conti-

nuidad, si es $f''(a) > 0$, pero esta condición no es necesaria, pues puede ser $f''(a) = 0$.

Si $f''(\xi)$ tiene signos opuestos a la derecha e izquierda de a, el punto se dice de *inflexión*. Es condición necesaria, pero no suficiente, para esto que $f''(a) = 0$.

Si es $f''(a) = 0$, la discusión se hace prolongando el desarrollo tayloriano hasta llegar a una derivada que en el punto a no sea nula. Tendremos:

$$y = f(a) + h \cdot f'(a) + h^{(n)} \, \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

Como la diferencia entre la ordenada de la función y la de la tangente tiene la misma expresión:

$$h^n \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

que en el caso de máximos y mínimos llegamos sin más a la siguiente conclusión:

Si la primera derivada no nula en a (aparte de la derivada de primer orden) es de orden impar, la curva tiene una inflexión; si es de orden par, la curva, es convexa, si dicha derivada es positiva, y cóncava si es negativa.

EJEMPLO:

Supongamos la curva $y = x^3(x - 1)$. Las derivadas sucesivas de la función hasta el tercer orden son:

$$y' = x^2(4x - 3)$$

$$y'' = x(12x - 6)$$

$$y''' = 24x - 6$$

Para $x = 0$ se anulan las derivadas primera y segunda, no la tercera; luego, en el punto $x = 0$ habrá un punto de inflexión de la curva, con tangente horizontal.

Para valores $1/2 < x$ la derivada segunda es positiva; luego hay convexidad.

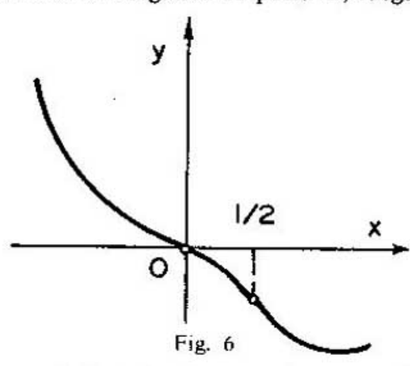


Fig. 6

Para valores de $0 < x < 1/2$, la derivada segunda es negativa; luego hay concavidad. Para valores $x < 0$ es $y'' > 0$, luego hay convexidad.

4. LIMITES DE EXPRESIONES INDETERMINADAS

Las reglas dadas para el cálculo de límites no permiten deducir nada en el caso en que, al tender la variable x hacia a, la función presente una de las formas que simbólicamente representamos del siguiente modo:

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0\cdot\infty,\ \infty-\infty$$

FORMA $\frac{0}{0}$. *Si tenemos que calcular el* $\lim\limits_{x\to a}\frac{\phi(x)}{\psi(x)}$ *y es* $\phi(a)=\psi(a)=0$ y son también nulas las derivadas sucesivas hasta la $\phi^{(p-1}(a)=0$, y hasta la $\psi^{(q-1}(a)=$ $=0$, podemos aplicar el desarrollo de Taylor y obtenemos:

$$\phi(x)=\frac{(x-a)^p}{p!}\phi^{(p}(a)+\varepsilon(x-a)^p$$

$$\psi(x)=\frac{(x-a)^q}{q!}\psi^{(q}(a)+\varepsilon'(x-a)^q$$

luego:

$$\frac{\phi(x)}{\psi(x)}=(x-a)^{p-q}\frac{\phi^{(p}(a)/p!+\varepsilon}{\psi^{(q}(a)/q!+\varepsilon'}$$

y pasando al límite para $x-a\to 0$, resulta que si $p>q$ el límite es ∞, si $p<q$ el límite es 0 y si $p=q$ el límite es:

$$\frac{\phi^{(p}(a)}{\psi^{(p}(a)}$$

Como caso particular resulta fácilmente la llamada *regla de l'Hôpital:*

Si en un entorno de a *tienen* $\phi(x)$, $\psi(x)$, *derivadas finitas que no se anulan simultáneamente y* $\phi(a)=\psi(a)=0$ *se verifica:*

$$\lim_{x\to a}\frac{\phi(x)}{\psi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\phi'(x)}{\psi'(x)}$$

supuesto existente el segundo límite.

Estos métodos valen para calcular también $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\phi(x)}{\psi(x)}$, pues basta poner $x=\frac{1}{z}$ y obtener $\lim\limits_{z\to 0}\frac{\phi(\frac{1}{z})}{\psi(\frac{1}{z})}$. Análogamente si se quiere calcular $\lim\limits_{x\to a}\frac{\phi(x)}{\psi(x)}$

cuando $\phi(x) \to \infty$, $\psi(x) \to \infty$ basta observar que dicho límite coincide con el $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{1 : \psi(x)}{1 : \phi(x)}$ que es la forma $\dfrac{0}{0}$.

Análogas transformaciones valen para calcular límites del tipo $\infty \cdot 0$, $\infty - \infty$, etcétera.

EJEMPLOS:

$a)$ $$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1 + \varepsilon(x - a)}{2 + \varepsilon' x} = \frac{1}{2}.$$

$b)$ $$\lim_{x \to a} \frac{x \log a - a \log x}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{\log a - 1 + \varepsilon(x - a)}{1 + \varepsilon(x - a)} = \log a - 1.$$

EJERCICIOS

1. Determinar los intervalos de concavidad y convexidad y los máximos y mínimos de la elipse:

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

2. Se quiere hacer una caja rectangular cortando un cuadrado de cada esquina de un rectángulo de 20 cm. y 30 cm. de lados, y doblando los bordes.

Se desea construir la caja de volumen máximo.

Solución:

$x = 3{,}9$, el valor máximo del volumen es 1.056 cm^3

3. Hallar los máximos y mínimos, inflexiones e intervalos de concavidad y convexidad de la curva:

$$y = \pm x \sqrt{1 - x^2}$$

Solución:

Máximos $(1/\sqrt{2},\ 1/2)$, $(-1/\sqrt{2},\ 1/2)$

Mínimos $(1/\sqrt{2}, -1/2)$, $(-1/\sqrt{2}, -1/2)$

Inflexiones $(0, 0)$.

4. Hallar el máximo y el intervalo de la concavidad de la curva $y = \ln x - x$.

Solución:

Máximo $(1, -1)$. Concavidad

5. Determinar los intervalos de concavidad de la curva:

$$y = x^4 - 12x^2 + 2$$

Solución:

$$\text{Convexidad si } x < -\sqrt{2}, \quad \text{o} \quad x > \sqrt{2}$$

$$\text{Cóncava si} \quad -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$$

6. $$\lim_{x \to 0} \frac{3x + 2 \operatorname{sen} x}{4x} \text{ (Solución 5/4)}$$

7. $$\lim_{n \to \infty} \frac{x - 1}{x^2 + 3x - 2} \text{ (Solución 0)}$$

8. Encontrar la falacia de la siguiente aparente demostración:

Si multiplicamos los dos miembros de la igualdad:

$$x = a - b \qquad [1]$$

por x, obtenemos:

$$x^2 = ax - bx \qquad [2]$$

y si elevamos al cuadrado los dos miembros de [1], obtenemos:

$$x^2 = a^2 - 2ab + b^2 \qquad [3]$$

De [2] y [3], se deduce:

$$ax - bx = a^2 - 2ab + b^2$$

es decir,

$$ax + ab - a^2 = bx - ab + b^2$$

o bien,

$$a(x - a + b) = b(x - a + b) \qquad [4]$$

Si dividimos los dos miembros de [4] por $x - a + b$, obtendremos $a = b$; pero esto no es lícito, porque:

$$x - a + b = 0$$

Pongamos, pues:

$$a \frac{x - a + b}{x - a + b} = b \frac{x - a + b}{x - a + b}$$

y hallamos el límite cuando $x \to a - b$, aplicando la regla de l'Hôpital:

$$a \frac{1}{1} = b \frac{1}{1}; \qquad \text{luego,} \quad a = b$$

CAPITULO 21

Construcción de la curva de ecuación $y = f(x)$

1. METODO DE CONSTRUCCION

Conviene seguir el siguiente orden:

1.º *Determinación del campo de definición de la función* que es el conjunto de valores de la variable independiente x para los cuales está definido el valor y. No está definida $y = f(x)$ en los casos siguientes:

a) Radicales de índice par de números negativos.

Por ejemplo:

$$y = \sqrt{4 - x^2}$$

sólo está definida en el intervalo $(-2, +2)$.

b) Logaritmos de números negativos.

Por ejemplo:

$y = \ln(x - 1)$ sólo está definida en el intervalo $(1, \infty)$.

c) El *arc sen* x y *arc cos* x no están definidos en los intervalos $-\infty < x < -1$; $1 < x < \infty$.

Por ejemplo:

$y = \text{arc sen}\,(x^2 - 1)$ sólo está definida en el intervalo $(-\sqrt{2}, +\sqrt{2})$.

d) En las expresiones de la forma:

$$f(x)^{\phi(x)}$$

debe ser $f(x) > 0$.

Por ejemplo:

$y = x^x$, sólo está definida para $x > 0$.

2. DETERMINACION DE SIMETRIAS

a) Se cambia x en $-x$; si y no cambia la curva es simétrica respecto del eje y. Si al cambiar x en $-x$, y cambia en $-y$, la curva es simétrica respecto al origen. En estos casos, basta construir la curva para valores $x > 0$, pues el resto se obtiene por simetría.

Por ejemplo:

$$y = x^4 + x^2 + 1, \text{ cambiando } x \text{ en } -x, \text{ resulta:}$$

$$(-x)^4 + (-x)^2 + 1 = x^4 + x^2 + 1 = y$$

luego, la curva es simétrica respecto a oy.

Si en la función:

$$y = \frac{x^3 + x}{5x^2}$$

ponemos $-x$ en vez de x, resulta:

$$\frac{(-x)^3 - x}{5(-x)^2} = \frac{-(x^3 + x)}{5x^2} = -y$$

luego, hay simetría respecto al origen.

b) Si es $y = \pm f(x)$, entonces la curva es simétrica respecto al eje x y basta construir la representación de la función:

$$y = \pm f(x).$$

3. PERIODICIDAD DE $y = f(x)$

Si para un valor T, y para todo x es $f(x + T) = f(x)$, la curva es periódica de período T.

Por ejemplo:

$$y = \operatorname{sen} x + \cos^2 x, \text{ es periódica de periodo } 2\pi, \text{ pues, } \operatorname{sen}(x + 2\pi) +$$
$$+ \cos^2(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x + \cos^2 x; \ (T = 2\pi).$$

4. ASINTOTAS Y RAMAS PARABOLICAS

Un punto que se mueva sobre una curva se dice que se aleja infinitamente cuando su abscisa, o su ordenada, o ambas coordenadas, tienden a infinito.

Se pueden presentar los siguientes casos:

1.° Si $y \to \infty$ cuando $x \to a$, se dice que la curva contiene el punto del infinito del eje y.

2.° Si $y \to b$ cuando $x \to \infty$, se dice que la curva contiene el punto del infinito del eje x.

3.° Si $y \to \infty$ cuando $x \to \infty$, y es $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{y}{x} = m \neq 0$, se dice que la curva contiene el punto del infinito de la recta $y = mx$.

4.° Si $y \to \infty$ cuando $x \to \infty$, y es $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{y}{x} = \infty$, o bien $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{y}{x} = 0$, se dice que la curva tiene una rama parabólica en la dirección del eje y o del eje x, respectivamente.

EJEMPLOS:

1. La curva de ecuación $y = \dfrac{x+1}{x-1}$ es tal que para $x \to 1$, $y \to \infty$, luego, contiene el punto de infinito del eje y.

Cuando $x \to \infty$, $y = \dfrac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} \to 1$, luego contiene también el punto del infinito del eje x.

2. La curva de ecuación $y = x^2$ es tal que cuando $x \to \infty$, $y \to \infty$, y la razón:

$$\frac{y}{x} = \frac{x^2}{x} \to \infty$$

luego tiene una rama parabólica en la dirección del eje y.

3. La curva de ecuación $y = \sqrt{x}$ es tal que cuando $x \to \infty$, $y \to \infty$, y la razón:

$$\frac{y}{x} = \frac{\sqrt{x}}{x} \to 0$$

luego, tiene una rama parabólica en la dirección del eje x.

Se llama asíntotas las rectas límites, cuando existen, de rectas que pasan por un punto P de la curva y por el punto del infinito correspondiente, cuando P tiende a éste.

De acuerdo con esta definición, si la curva contiene el punto del infinito de la recta $y = mx$, la asíntota paralela a esa recta se obtendrá hallando la posición límite de una recta paralela a la $y = mx$ que pase por el punto $P(x_1y_1)$ variable sobre la curva al tender P al infinito. La ecuación de la recta paralela a la $y = mx$, por P, es $y - y_1 = m(x - x_1)$.

El coeficiente angular está determinado: es m. Hay que calcular la ordenada en el origen al variar P, la cual será:

$$\lim_{x_1 \to \infty} (y_1 - mx_1)$$

Si este límite es h, la *ecuación de la asíntota es:*

$$y = mx + h$$

Si es $\lim\limits_{x_1 \to \infty} (y_1 - mx_1) = \infty$, se dice que hay una *rama parabólica* en la dirección $y = mx$.

Como casos particulares, si la curva contiene el punto del infinito del eje x, es decir, se verifica que $\lim\limits_{x \to \infty} y = b$, la recta $y = b$ es una asíntota; y si la curva contiene el punto del infinito del eje y, es decir, se verifica que $y \to \infty$, cuando $x \to a$, la recta $x = a$ es una asíntota.

EJEMPLO:

$$y = x - \frac{2}{x}$$

$y \to \infty$, si $x \to 0$, luego, $x = 0$ es una asíntota. Si $x \to \infty$, $y \to \infty$:

$$\frac{y}{x} = 1 - \frac{2}{x^2} \to 1,$$

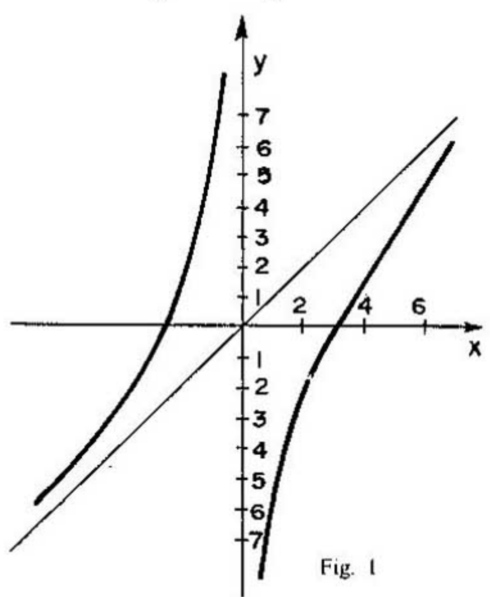


Fig. 1

luego hay una rama infinita en la dirección $y = x$. Para tener la ordenada en el origen de la asíntota hay que calcular:

$$\lim_{x\to\infty} (y - x) = \lim_{x\to\infty} \left(x - \frac{2}{x} - x\right) = \lim_{x\to\infty} -\frac{2}{x} = 0$$

luego, la asíntota es $y = x$.

5. POSICION DE LA CURVA RESPECTO A LAS ASINTOTAS

Si la asíntota es $y = mx + h$, basta estudiar el signo de $f(x) - mx - h$ cuando $x \to \infty$, y según sea positivo o negativo, la curva está por encima o debajo de la asíntota.

Si la asíntota es $y = b$, se ve que el signo de $f(x) - b$ cuando $x \to \infty$; y si la asíntota es $x = a$, se estudia el signo de $x - a$ cuando $y \to \infty$.

En el ejemplo precedente:

$$y = x - \frac{2}{x}$$

Para la asíntota $y = x$, tenemos:

$$f(x) - x = x - \frac{2}{x} - x = -\frac{2}{x}$$

que para $x \to +\infty$ es negativo; luego la curva está debajo de la asíntota. Si $x \to -\infty$, $f(x) - x > 0$; luego la curva está encima de la asíntota.

Respecto de la asíntota $x = 0$, observamos que para valores $x > 0$ se obtienen valores $y < 0$; luego la rama que tiende a $-\infty$ está a la derecha de la asíntota, y para $x < 0$, resulta $y > 0$; luego la rama que tiende a $+\infty$ está a la izquierda de la asíntota.

6. DETERMINACION DE ALGUNOS PUNTOS Y TANGENTES DE LA CURVA Y ESPECIALMENTE DE LAS INTERSECCIONES CON LOS EJES

Para formar la tabla de la función véase lo dicho en la lección 15. Los puntos de intersección con los ejes se obtienen haciendo primero $x = 0$, y después, $y = 0$.

Ejemplo:

$$y = \frac{x^2 - 2x + 1}{3x + 2}$$

Haciendo $x = 0$, resulta $y = 1/2$; haciendo $y = 0$, resulta:

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

luego, $x = 1$.

7. MAXIMOS Y MINIMOS. PUNTOS DE CRECIMIENTO

Ya se ha visto anteriormente.

8. PUNTOS DE INFLEXION; CONCAVIDAD Y CONVEXIDAD.

Ya se vio anteriormente.

EJEMPLOS:

Vamos a aplicar el método a la construcción de algunas curvas de gran interés en Economía y Estadística.

1. *Curva normal de* Gauss, de gran interés en la teoría de probabilidades y errores. Su ecuación es:

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

a) La función está definida para todo valor de x.

b) Si ponemos $-x$ en vez de x, resulta el mismo valor:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(-x)^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

luego, el eje y es eje de simetría.

c) No hay periodicidad en la curva.

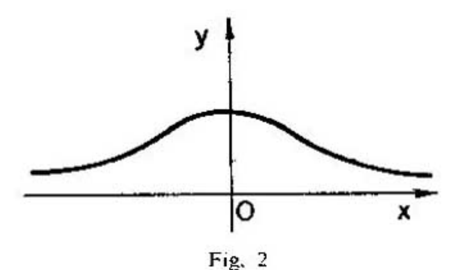


Fig. 2

d) Si $x \to \infty$, $y \to 0$, luego $y = 0$ es una asíntota y la curva está encima de la asíntota. No hay otras asíntotas porque y no tiende a ∞.

e) Para $x = 0$, $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, que es el único punto de intersección con los ejes, pues haciendo $y = 0$ no se obtiene ningún valor para x.

f) La derivada es $y' = \frac{-x}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$. Esta derivada es nula sólo para $x = 0$ y es negativa para $x > 0$; luego la función es decreciente al crecer x, y como la curva es simétrica, tiene para $x = 0$ un máximo.

g) La derivada segunda es:

$$y'' = \frac{x^2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} (x^2 - 1)$$

Para $x = 0$, $y'' = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} < 0$, con lo que se confirma que en $x = 0$ hay un máximo.

Para $x = \pm 1$, es $y'' = 0$; luego, estos puntos de abscisas:

$$x = \pm 1 \quad \text{y ordenadas} \quad y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}}$$

son puntos de inflexión. Considerando sólo la rama correspondiente a $x > 0$, podemos decir que a la izquierda del punto de inflexión es $y'' < 0$; luego hay concavidad y a la derecha del punto de inflexión es $y'' > 0$; luego hay convexidad.

El coeficiente angular de la tangente en el punto de inflexión es:

$$y' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}}$$

De lo dicho se deduce la forma de la curva (fig. 2).

2. *Curva logística.* Se utiliza para estudiar fenómenos de crecimiento (población, industrias, etc.).

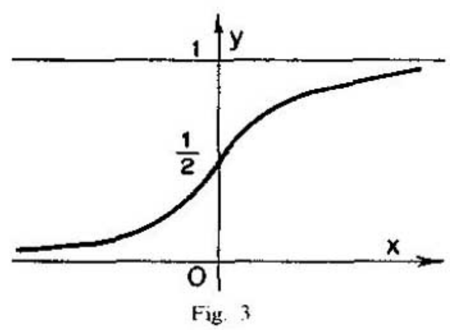


Fig. 3

Su ecuación es:

$$y = \frac{k}{1 + be^{ax}} \quad (b > 0, \quad a < 0, \quad k > 0)$$

a) La función está definida para todo valor de x.

b) No hay simetría ni periodicidad.

c) Si $x \to +\infty$, $y \to k$; luego $y = k$ es una asíntota.

Si $x \to -\infty$, $y \to 0$; luego $y = 0$ es una asíntota.
No hay más asíntotas.

d) Para $x = 0$, $y = k : (1 + b)$, que es el único punto de intersección con los ejes.

e) La derivada es:

$$y' = \frac{-kbae^{ax}}{(1 + be^{ax})^2}$$

que es siempre positiva; luego, la función crece al recorrer x de $-\infty$ a $+\infty$.

f) La derivada segunda es:

$$y'' = \frac{-kba^2e^{ax}(1 - be^{ax})}{(1 + be^{ax})^3}$$

que se anula para $x = -(\ln b) : a$, en cuyo punto tiene la curva una inflexión.

El valor de la ordenada es $y = \frac{k}{2}$.

De todo esto se infiere que la curva tiene la forma que indica la figura.

EJERCICIOS

1. Construir la curva de ecuación:

$$y = \frac{x^3 + x}{x^3 - 1}$$

Solución:

Asíntotas: $x = 1$, $y = 0$.

Máximo: $(-0{,}91,\ 1{,}13)$.

Inflexión: $(0, 0)$.

2. Construir la curva de ecuación:

$$y = x - \frac{2}{x} - 3 \ln x$$

3. Construir la curva: $y = \ln x : x$.

4. Construir la curva de ecuación:

$$y = \frac{e^x}{e^x - 1}$$

CAPITULO **22**

Construcción de una curva dada en ecuaciones paramétricas

1. LA TANGENTE DE UNA CURVA DADA EN ECUACIONES PARAMETRICAS

Consideremos las funciones:

$$\begin{aligned} x &= r\ cos\ t \\ y &= r\ sen\ t \end{aligned} \qquad [1]$$

Haciendo variar t obtenemos, pues, valores (x, y) que, representados en un plano, nos dan una curva.

En general, dos funciones $x = f(t)$, $y = g(t)$, que expresan las coordenadas de un punto de una curva como funciones de un parámetro t, se llaman *ecuaciones paramétricas* de la curva.

La cuerda que une el punto fijo P_0, que corresponde al valor t_0 del parámetro, con el punto variable P, que corresponde al valor t del parámetro, tiene como pendiente:

$$\frac{g(t) - g(t_0)}{f(t) - f(t_0)} = \frac{\dfrac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0}}{\dfrac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}}$$

Si suponemos que ambas funciones son derivables en t_0 y que $f'(t_0) \neq 0$, el límite de la fracción anterior es:

$$\frac{g'(t_0)}{f'(t_0)}$$

si $f'(t_0) = 0$ y $g'(t_0) \neq 0$, el límite es infinito y si ambas derivadas son nulas, no se puede afirmar nada, en general, sobre dicho límite. Podemos, pues, decir que:

Si las dos derivadas $f'(t_0)$ y $g'(t_0)$ existe y no son simultáneamente nulas, la curva [1] tiene en P_0 una tangente cuyo coeficiente angular es:

$$\frac{g'(t_0)}{f'(t_0)}$$

y la ecuación de la tangente es:

$$y - y_0 = \frac{g'(t_0)}{f'(t_0)}(x - x_0)$$

2. CAMPO DE DEFINICION. SIMETRIAS. PERIODICIDAD

Vamos a dar la marcha para la construcción de una curva dada por sus ecuaciones paramétricas:

$$\begin{aligned} x &= f(t) \\ y &= g(t) \end{aligned} \qquad [1]$$

que va a ser análoga a la vista para el caso de una curva en forma explícita. Cada una de las funciones [1] tendrá un campo de variación, y la parte común a éstos es el campo en que, al dar valores a t, obtenemos un valor para x y otro para y, que nos dan las coordenadas de un punto de la curva.

En principio haremos variar t de $-\infty$ a $+\infty$; pero este intervalo se puede restringir por no estar definida una, al menos, de las funciones o por ser funciones trigonométricas, en cuyo caso a causa de la periodicidad bastará considerar el intervalo $(0, 2\pi)$.

EJEMPLOS:

1) La curva de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x &= 2t + 1 \\ y &= \sqrt{t^2 - 1} \end{aligned}$$

tiene x definida para todo valor de t e y sólo fuera del intervalo $-1 < t < 1$; luego éste será el intervalo de t en que no hay puntos de la curva.

2) La curva de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x &= a \cos t \\ y &= a \operatorname{sen} t \end{aligned}$$

está definida para t en el intervalo $(-\infty, +\infty)$; pero como ambas funciones son periódicas basta considerar el intervalo $(0,2\pi)$.

Al cambiar t en $-t$, pueden presentarse los siguientes casos:

1.º x e y no cambian. Se obtiene el mismo punto. Basta, pues, tomar como intervalo de variación $(0, +\infty)$ para obtener toda la curva.

2.º x cambia en $-x$, y no cambia. Simetría respecto del eje y.

3.º x no cambia, y cambia en $-y$. Simetría respecto al eje x.

4.º x cambia en $-x$ e y en $-y$. Simetría respecto al origen.

Si para un valor de t se obtienen dos valores de x opuestos y un sólo valor de y, la curva es simétrica respecto al eje y.

Si para un valor de t se obtienen dos valores de y opuestos y un sólo valor de x, la curva es simétrica respecto al eje x.

Si para un valor de t se obtienen dos valores opuestos de x y dos valores opuestos de y, la curva es simétrica respecto al eje x y al eje y.

EJEMPLOS:

1) La curva:

$$x = a \cos t$$
$$y = b \operatorname{sen} t$$

es tal que si se pone $-t$ en vez de t, se obtiene:

$$a \cos(-t) = a \cos t = x$$
$$b \operatorname{sen}(-t) = -b \operatorname{sen} t = -y$$

luego es simétrica respecto al eje x.

2) La curva:

$$x = \sqrt{t^2 - 1}$$
$$y = 2t$$

Da para un t dos valores opuestos de x y uno sólo de y; luego es simétrica respecto al eje y.

3. ASINTOTAS

Se buscan los valores de t para los que $y = g(t) \to \infty$ y tales que $x = f(t) \to \to a \neq \infty$. Entonces una asíntota es $x = a$. Análogamente si $x = f(t) \to \infty$ y $y = g(t) \to b$, es $y = b$ una asíntota.

Si cuando $t \to t_0$, se tiene $f(t) \to \infty$, $g(t) \to \infty$, puede ocurrir:

1.°
$$lim \frac{g(t)}{f(t)} = m$$

en cuyo caso hay un punto en el infinito en la dirección $y = mx$. Si:

$$g(t) - mf(t) \to n \neq \infty$$

hay una asíntota $y = mx + n$.

Y si $g(t) - mf(t) \to \infty$, hay una rama parabólica en la dirección $y = mx$.

2.°
$$lim \frac{g(t)}{f(t)} = \infty$$

rama parabólica en la dirección del eje y.

3.°
$$lim \frac{g(t)}{f(t)} = 0$$

rama parabólica en la dirección del eje x.

La posición respecto de las asíntotas se determina viendo el signo de $g(t) - mf(t) - n$ cuando $t \to \infty$, análogamente al caso de forma explícita.

EJEMPLO:

Sea la curva:
$$x = \frac{t + 2}{t^3 - 1}, \quad y = \frac{t - 5}{(t - 3)(t - 1)}$$

Para $t \to -1$, $x \to \infty$.
$$y \to \frac{-6}{8}$$

luego $y = -\frac{6}{8}$ es una asíntota.

Para $t \to 1$, $x \to \infty$, $y \to \infty$.

$$\frac{y}{x} = \frac{(t - 5)(t + 1)}{(t + 2)(t - 3)} \to \frac{(1 - 5)(1 + 1)}{(1 + 2)(1 - 3)} = \frac{4}{3}$$

La ordenada en el origen será:

$$n = \lim_{t \to 1} \left(\frac{t - 5}{(t - 3)(t - 1)} - \frac{4}{3} \frac{t + 2}{(t - 1)(t + 1)} \right)$$
$$= \lim_{t \to 1} \frac{3(t - 5)(t + 1) - 4(t + 2)(t - 3)}{3(t + 1)(t - 1)(t - 3)} = \frac{5}{6}$$

La ecuación de la asíntota es:
$$y = \frac{4}{3}x + \frac{5}{6}$$

4. DETERMINACION DE PUNTOS Y TANGENTES

Los puntos de intersección con el eje x nos dan los valores de t que hacen $g(t) = 0$ y los de intersección con el eje y los que hacen $f(t) = 0$. Si para algún t es $f(t) = 0$, $g(t) = 0$, el origen es un punto de la curva.

EJEMPLO:

Dada la elipse de ecuaciones:

$$x = a \cos t$$
$$y = b \operatorname{sen} t$$

Los puntos de intersección con el eje x son los que dan: $b \operatorname{sen} t = 0$, o sea, para $t = 0$, $t = \pi$; esto es, son los puntos $(a, 0)$, $(-a, 0)$.

La ecuación de la tangente es:

$$y - y_0 = \frac{b \cos t_0}{-a \operatorname{sen} t_0}(x - x_0)$$

Como el coeficiente angular es ∞ en dichos puntos, las tangentes serán:

$$x = a; \; x = -a$$

5. MAXIMOS Y MINIMOS. PUNTOS DE INFLEXION. CONCAVIDAD Y CONVEXIDAD

No ofrece ninguna novedad sobre lo ya visto para las curvas en forma explícita, salvo el cálculo de derivadas que puede verse en los ejemplos a continuación.

EJEMPLOS:

Construir la curva:

$$x = t(t - 1)$$
$$y = t^3 - 1$$

1.° Se hace variar t de $-\infty$ a $+\infty$, porque x e y están definidas ambas en dicho intervalo y no hay simetrías ni periodicidad.

2.° ASINTOTAS.—No hay asíntotas paralelas a los ejes, pues si $x \to \infty$, $y \to \infty$, y recíprocamente. Veamos el:

$\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{y}{x} = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{t^3 - 1}{t(t - 1)} = \infty$, luego hay una rama parabólica en la dirección del eje y.

3.° PUNTOS NOTABLES.—Haciendo $y = 0$, $t^3 - 1 = 0$, luego $t = 1$. Al cual corresponde $x = 0$, $y = 0$. La curva pasa por el origen y la tangente en él tiene por pendiente:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=1} = \left(\frac{3t^2}{2t-1}\right)_{t=1} = 3$$

Haciendo $x = 0$, $t = 0$ ó $t = 1$. Para $t = 0$, $x = 0$, $y = -1$.

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=0} = 0$$

luego la tangente en dicho punto es $y = -1$.

4.° MAXIMOS Y MINIMOS.—Puntos de inflexión.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3t^2}{2t-1} \text{ se anula para } t = 0$$

Para ver si corresponde a máximo, mínimo o inflexión calculamos la derivada segunda:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)\frac{dt}{dx} = \frac{y''(t)\cdot x'(t) - y'(t)\,x''(t)}{x'(t)^2} : x'(t)$$

$$= \frac{6t(2t-1) - 3t^2\,2}{(2t-1)^2} : (2t-1) = \frac{6t(t-1)}{(2t-1)^3}$$

Se ve así que la derivada segunda se anula cambiando de signo, luego hay inflexión.

Para $t = 1$ también hay inflexión por la misma razón.

Se puede reunir lo dicho en el siguiente cuadro:

t	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x	$+\infty$	+	0	−	0	+	$+\infty$
y	$-\infty$	−	−1	−	0	+	$+\infty$
y'			0		3		
y''			0		0		

La forma de la curva se indica en la figura.

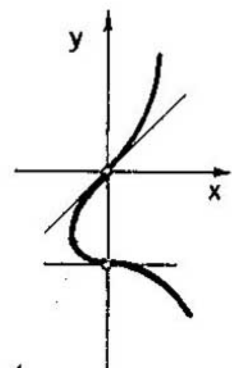


Fig. 4

EJERCICIOS

1. Dibujar la cicloide de ecuaciones:

$$x = 2(t - \operatorname{sen} t)$$
$$y = 2(1 - \cos t)$$

2. Dibujar las curvas de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{aligned} x &= \frac{t-2}{t^2-1} \\ y &= \frac{t-5}{(t-3)(t-1)} \end{aligned} \right. \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{3at}{1+t^3} \\ y &= \frac{3at^2}{1+t^3} \end{aligned} \right.$$

3. Dibujar la curva de ecuaciones:

$$x = \frac{t}{t^2-1} \qquad y = \frac{t^2}{t-1}$$

Solución:

$$y = -\,{}^1/_2 \qquad \text{corte} \qquad x = -\frac{2}{3}$$

Asíntotas:

$$x = 0 \qquad \text{corte} \qquad y = 0$$

$$y = 2x + {}^3/_2 \qquad \text{corte} \qquad x = \frac{-6}{5}$$

CAPITULO **23**

Diferencial de una función real de una variable

1. DEFINICION

Hemos llamado incremento de la función $f(x)$ correspondiente al incremento Δx de la variable independiente al valor $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Si suponemos que $f(x)$ tiene derivada en el punto x, llamaremos *diferencial de la función $f(x)$ correspondiente al Δx de la variable independiente al producto de la derivada $f'(x)$ por dicho Δx, y escribiremos*:

$$dy = df(x) = f'(x)\,\Delta x$$

Veamos qué relación existe entre $\Delta f(x)$ y $df(x)$.

Como es $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x)$, resulta que la diferencia:

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} - f'(x) = \varepsilon(x) \to 0 \quad \text{cuando } \Delta x \to 0$$

De aquí se obtiene:

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon(x)$$

luego:

$$\Delta f(x) = [f'(x) + \varepsilon(x)]\,\Delta x$$

es decir:

$$\Delta f(x) = f'(x)\,\Delta x + \varepsilon(x)\,\Delta x$$

o bien:

$$\Delta f(x) = df(x) + \varepsilon(x)\,\Delta x \qquad [1]$$

Por tanto:

El $\Delta f(x)$ se descompone en dos sumandos: la diferencial $df(x)$ y un infinitésimo de orden superior a Δx (*).

Como la derivada de $f(x) = x$ es 1, se tiene:

$$dx = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$$

y teniendo esto en cuenta, resulta:

$$dy = f'(x)\, dx \qquad [2]$$

De [2] se deduce:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \qquad [3]$$

es decir, la derivada o límite del cociente de incrementos es igual al cociente de diferenciales.

Como vemos, la diferencial $df(x)$ depende de x, de $f(x)$ y de $\Delta x = dx$.

2. INTERPRETACION GEOMETRICA DE LA DIFERENCIAL

Se tiene en la figura:

$$\Delta f(x) = P'P_2 = P'P_1 + P_1P_2$$

y

$$P'P_1 = PP' \cdot tg\, \theta = \Delta x \cdot f'(x) = dy$$

luego, gráficamente la $df(x)$ representa el incremento $P'P_1$ de ordenada de la tangente a la curva correspondiente al Δx.

Fig. 1

Obsérvese que la relación [3] equivale a poner:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} \qquad [4]$$

y aunque es:

$$\Delta x = dx$$

no puede deducirse que $lim\, \Delta y = dy$.

(*) Es decir, tal que su cociente por Δx tiende a cero.

EJEMPLO:

Si $f(x) = x^2$, es $f'(x) = 2x$, y para $x = 2$, resulta $f'(2) = 4$. Entonces, para $dx = 0{,}01$, tenemos $dy = 4 \cdot 0{,}01 = 0{,}04$; y el $\Delta y = 2{,}01^2 - 2^2 = 0{,}0401$. Análogamente, para $dx = 0{,}1$; $dy = 0{,}4$, $\Delta y = 0{,}41$; para $dx = 1$, $dy = 4$, $\Delta y = 5$, etc.

NOTA. De la relación [4] se deduce la siguiente fórmula aproximada:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

para $\Delta x = dx$ pequeño, de la cual resulta $\Delta y = dy$, con tanta aproximación cuanto menor sea dx. Pero esto no autoriza de ningún modo a decir que la diferencial es un incremento infinitamente pequeño. Esto, que aún dicen algunos libros, es un residuo de la época de LEIBNITZ, en que «la diferencial se consideraba como un número no cero, pero menor que cualquier número real, cuyo significado sólo podían captar personas con verdadero sentido matemático».

3. FORMULA DE DIFERENCIACION

La fórmula [2] es introducida por algunos autores simplemente como una notación de la derivada. Tal notación es, sin duda, la más clara y cómoda.

He aquí algunas de las fórmulas obtenidas traducidas a la nueva notación:

$$\frac{d(\operatorname{sen} x)}{dx} = \cos x$$

$$\frac{d(x^n)}{dx} = nx^{n-1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}; \quad \frac{d(u \cdot v)}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

NOTA: Hemos visto que si $y = f(u)$ es una función de la variable independiente u se tiene:

$$dy = f'(u)du$$

y vamos a ver que esta misma relación subsiste si u no es variable independiente, sino que es $u = \phi(x)$, siempre que se tenga en cuenta que, en este segundo caso, du no es ya la diferencial de una variable independiente, sino la correspondiente a dx.

En virtud del teorema de derivación de las funciones de funciones:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}; \quad dy = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \cdot dx \qquad [5]$$

y como

$$du = \phi'(x) \cdot dx = \frac{du}{dx}dx$$

resulta:

$$dy = f'(u)\,du \qquad \text{c. q. d.}$$

Las consideraciones anteriores ponen de manifiesto la validez de la fórmula

$$dy = f'(u)\,du$$

aunque u no es independiente, siendo ésta una de las ventajas que han hecho preferir la notación diferencial (debida a LEIBNITZ) para las derivadas.

Es interesante observar el distinto significado de du en el numerador y denominador de la relación [5], por cuyo motivo no puede pasarse de un modo directo del segundo al primer miembro, sino que se precisa la demostración que vimos anteriormente.

4. DIFERENCIALES SUCESIVAS

Si dy es diferenciable, su diferencial se llama diferencial segunda de y y se designa por d^2y y depende de la relación que se quiera establecer entre x y dx, ya que depende de ambas. Si suponemos que la $dx = \Delta x$ es igual para todo valor de x, dicha dx se puede considerar como una constante, con lo que tenemos:

$$d^2y = d(f'(x) \cdot dx) = d(f'(x)) \cdot dx = f''(x) \cdot dx \cdot dx = f''(x) \cdot dx^2$$

Análogamente:

$$d^3y = d(f''(x) \cdot dx) = d(f''(x)) \cdot dx = f'''(x) \cdot dx^3$$

y, en general,

$$d^ny = f^{(n}(x)dx^n$$

de donde sale:

$$y' = \frac{dy}{dx}; \qquad y'' = \frac{d^2y}{dx^2} \cdots \qquad y^{(n} = \frac{d^ny}{dx^n}$$

Resulta, pues, que la derivada n-sima de una función puede representarse como el cociente de la diferencial n-sima por la potencia n-sima de la diferencial de la variable independiente.

5. PROPIEDAD LINEAL DE LA DIFERENCIAL

Si para abreviar la notación ponemos $dx = h$, la:

$$dy = f'(x) \cdot h$$

se puede considerar como una función $\phi(x, h)$; *lineal respecto a* h, pues, es:

$$\phi(x, ah + a'h') = f'(x)(ah + a'h') = a[f'(x)\, h] + a'[f'(x)\, h'] =$$

$$= a\phi(x, h) + a'\phi(x, h')$$

EJERCICIOS

1. Calcular las siguientes diferenciales.

$$d[(x-1)(x+1)] \qquad \text{si} \qquad x = 3,\ dx = 0{,}01$$

$$d\sqrt{x^2 - x + 1} \qquad \text{si} \qquad x = 2,\ dx = 0{,}1$$

$$d\sqrt{x^2 - 1} \qquad \text{si} \qquad x = 2,\ dx = 1$$

2. Calcular las siguientes diferenciales:

$$d(x^5 + x^4 + x^3 + x^2) \qquad \text{para} \qquad x = 2,\ dx = 4$$

$$d\left(x + \frac{1}{x} + x^2 + \frac{1}{x^2}\right) \qquad \text{para} \qquad x = 1,\ dx = 3h + 2k$$

$$d(e^x \cos x) \qquad \text{para} \qquad x = 1,\ dx = 3h + 4k$$

$$d(\operatorname{sen} x \cos x) \qquad \text{para} \qquad x = \frac{\pi}{2},\ dx = 2h + k$$

3. Dada la función:

$$f(x) = x^3 + x^2$$

determinar $\Delta f(x)$, $df(x)$ para cada uno de los siguientes valores:

$$x = 2,\ dx = 0{,}1 \qquad x = 3,\ dx = 1$$

4. Un punto se mueve según la ley $s = t^2 + 2t + 1$. Mediante las diferenciales, calcular el espacio recorrido entre los tiempos $t = 1$, $t = 1{,}1$.

CAPITULO 24

Derivadas parciales

1. DERIVADAS PARCIALES

Si en la función $z = f(x, y)$ suponemos $y = k$ y hacemos variar x, obtenemos una curva situada en un plano paralelo al xOz. La pendiente de esta curva se obtiene derivando:

$$z = f(x, y)$$

como si la variable y fuera una constante. El resultado se llama *derivada parcial de z respecto a x*, y se designa con las notaciones:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z'_x = f'_x(x, y)$$

y en virtud de la definición es:

$$f'_x(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}$$

Análogamente se define la derivada parcial respecto a y, denotándose:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = z'_y = f'_y(x, y) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x, y + k) - f(x, y)}{k}$$

EJEMPLOS:

1. Sea: $z = x^2 + y^3$.

Es:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2$$

2. $z = \operatorname{sen}(x + y^2) + \sqrt{x}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos(x + y^2) + \frac{1}{2\sqrt{x}}; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y \cos(x + y^2)$$

2. DERIVADAS SEGUNDAS

Dada la función $z = f(x, y)$, las derivadas parciales:

$$\frac{\partial z}{\partial x}; \qquad \frac{\partial z}{\partial y}$$

son funciones de dos variables, para las que se definen análogamente las derivadas parciales, que serán las derivadas segundas de $f(x, y)$. Son cuatro:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}; \; \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}; \; \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y};$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y \cdot \partial x}$$

Si las derivadas primeras son continuas en un recinto, se demuestra que se verifica:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \cdot \partial x}$$

es decir, no influye el orden de la derivación (*).

EJEMPLO:

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \; \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - \dfrac{y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y} = \frac{-x \cdot y}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \cdot \partial x}$$

(*) El estudio de condiciones bajo las cuales el orden no influye en el resultado de la derivación tiene un gran interés teórico y ha sido objeto de teoremas debidos a Schwarz, Young, etc. (Véase el *Curso Preliminar de Análisis*, de Navarro Borrás-Ríos, etc.

3. DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

En las funciones que ordinariamente se manejan en la Matemática aplicada, se verifican, salvo en puntos aislados, las condiciones suficientes para que las derivadas sean independientes del orden en que se efectúa la derivación. Supuesto esto, una función tendrá dos derivadas parciales de primer orden:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = q$$

tres de segundo orden (*).

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = s, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t$$

cuatro de tercer orden:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}; \qquad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}, \qquad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}, \qquad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}$$

etcétera, y, en general, $n + 1$ derivadas de orden n:

$$\frac{\partial^n z}{\partial x^n}; \qquad \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1} \cdot \partial y}; \ \ldots\ ; \qquad \frac{\partial^n z}{\partial y^n}$$

4. FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

Todo lo dicho en los párrafos anteriores se generaliza al caso de funciones de varias variables. Nos limitaremos a indicar un

EJEMPLO:

$$\frac{\partial}{\partial x}(3x^2 y + \operatorname{sen} x + z^2) = 6xy + \cos x$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(3x^2 y + \operatorname{sen} x + z^2) = 3x^2$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(3x^2 y + \operatorname{sen} x + z^2) = 2z$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(3x^2 y + \operatorname{sen} x + z^2) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}(3x^2 y + \operatorname{sen} x + z^2) = 6x, \text{ etc.}$$

(*) La notación p, q, r, s, t, es de Euler. La notación con ′ es debida a Jacobi.

EJERCICIOS

1. Calcular las derivadas primeras y segundas de las funciones:

$$f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$f(x, y) = \text{sen}\,\frac{xy}{x - y}$$

$$f(x, y) = e^{-\frac{x}{y}}$$

2. Probar que si:

$$f = e^{\frac{y}{x}}\,\text{sen}\,\frac{y}{x},\ \text{es}\ x\,\frac{\partial f}{\partial x} + y\,\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

3. Probar que si $f = (x - y)(y - z)(z - x)$, es:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

CAPITULO **25**

Diferenciales de funciones de *n* variables

1. DERIVADAS PARCIALES Y CONTINUIDAD

La existencia de derivadas parciales en un punto implica la continuidad respecto a cada variable, pero no la continuidad en el punto, como prueba el siguiente ejemplo.

Sea $f(x, y) = 3x + y$ si $x = 0$, o $y = 0$; $f(x, y) = 1$ en los demás puntos. Esta función no es continua en (0, 0), a pesar de que existen las derivadas parciales:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(0,\,0)} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,\,0) - f(0,\,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3h}{h} = 3\,;\ \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(0,\,0)} = 1$$

Al buscar para las funciones de *n* variables un concepto que se relacione con la continuidad en forma análoga a como la derivada en las funciones de una variable se llega al concepto de diferencial, que vamos a introducir.

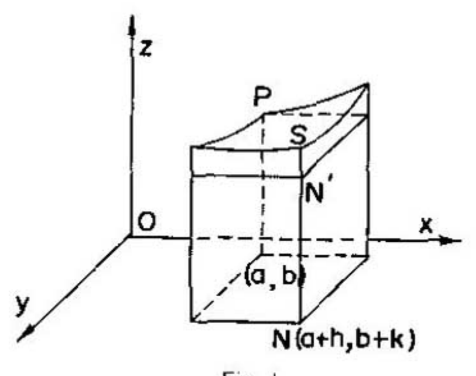


Fig. 1

2. INCREMENTO Y DIFERENCIAL

Sea la función $z = f(x, y)$ que suponemos admite derivadas parciales continuas. Si a partir de los valores (a, b) damos sendos incrementos, h, k, a las variables, el incremento de la función es:

$$\Delta z = f(a + h, b + k) - f(a, b)$$

En la figura 1:

$$\Delta z = N'S = NS - NN'$$

Al incrementar exclusivamente a en h, el incremento de la función será por el teorema de los incrementos finitos, y de Lagrange,

$$f(a + h, b) - f(a, b) = h \frac{\partial f(\xi, b)}{\partial x} = \frac{h\partial f(a, b)}{\partial x} + h\varepsilon$$

Al incrementar ahora b en k, resulta:

$$f(a + h, b + k) - f(a + h, b) = k \frac{\partial f(a + h, \eta)}{\partial y} = k \cdot \frac{\partial f(a, b)}{\partial y} + k\varepsilon'$$

Sumando, obtenemos:

$$\Delta z = f(a + h, b + k) - f(a + h, b) + f(a + h, b) - f(a, b) =$$

$$= h \frac{\partial f(a, b)}{\partial x} + k \frac{\partial f(a, b)}{\partial y} + h\varepsilon + k\varepsilon' \qquad [1]$$

en que $\varepsilon \to 0$ y $\varepsilon' \to 0$ cuando $h \to 0$ y $k \to 0$.

Vemos que el Δz se compone de dos partes: la primera, que se llama *diferencial* y se designa por:

$$dz = hf'_x + kf'_y \qquad [2]$$

es la suma de los productos de las derivadas parciales por los incrementos arbitrarios de las variables.

En particular, si $z = x$, $f'_x = 1$, $f'_y = 0$ queda $dx = h$.

Análogamente, si $z = y$, queda $dy = k$. Con lo que la diferencial es:

$$dz = f'_x dx + f'_y dy \qquad [3]$$

La segunda parte del incremento $h\varepsilon + k\varepsilon'$ es un infinitésimo de orden superior, según se demostró en el teorema de Lagrange.

Se suelen llamar diferenciales parciales $d_x z$, $d_y z$, a los productos:

$$d_x z = f'_x dx, \qquad d_y z = f'_y dy$$

EJEMPLOS:

1. $z = xy \qquad dz = ydx + xdy$

2. $z = x^2 + y \qquad dz = 2xdx + dy$

3. EL PLANO TANGENTE

En la figura 1, consideramos el punto $P(a, b, c)$. La ecuación de la tangente a la curva PQ en el plano $y = b$ es:

$$z - c = f'_x(a, b)(x - a)$$

y la tangente a PR en el plano $x = a$ es:

$$z - c = f'_y(a, b)(y - b)$$

La ecuación del plano que pasa por estas dos rectas, llamado *plano tangente a la superficie* es:

$$z - c = f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b)$$

Si en esta función lineal en x e y incrementamos las variables en h y k obtenemos como incremento:

$$hf'_x(a, b) + kf'_y(a, b)$$

que coincide con la diferencial de la función $z = f(x, y)$ en el punto (a, b), resultado análogo al obtenido para las funciones de una variable.

EJEMPLO:

Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie $z = xy$ en el punto $(1, 1)$.

Como se tiene $dz = ydx + xdy$, la ecuación del plano tangente en el punto $(1, 1)$ es:

$$z - 1 = (x - 1) + (y - 1)$$

4. CALCULO DE DIFERENCIALES

Para el cálculo de una diferencial:

$$dF(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy$$

puede procederse calculando las derivadas parciales y con ellas formar la diferencial total; pero, en general, es más sencillo calcular directamente la diferencial aplicando las reglas de diferenciación análogas a las de las funciones de una variable cuya justificación es inmediata.

Demostremos, por ejemplo, que:

$$d(f\phi) = fd\phi + \phi df$$

Se tiene:

$$d(f\phi) = \frac{\partial(f \cdot \phi)}{\partial x} dx + \frac{\partial(f \cdot \phi)}{\partial y} dy =$$

$$= \left(\phi \frac{\partial f}{\partial x} + f \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) dx + \left(\phi \frac{\partial f}{\partial y} + f \frac{\partial \phi}{\partial y}\right) dy =$$

$$= \phi \left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy\right) + f \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy\right) = \phi df + fd\phi$$

EJEMPLO:

Sea calcular:

$$df = d(x \operatorname{sen} y + x^3 y)$$

$$df = x \cos y dy + \operatorname{sen} y dx + 3x^2 y dx + x^3 dy = (\operatorname{sen} y + 3x^2 y) dx + (x \cos y + x^3) dy$$

y de aquí deducimos:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \operatorname{sen} y + 3x^2 y; \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x \cos y + x^3$$

5. PROPIEDADES DE LA DIFERENCIAL

Sea $z = f(x_1, \ldots, x_n)$, o bien en forma abreviada $z = f(\mathbf{x})$ una función real definida en un abierto $G \subset R^n$. Llamaremos diferencial de la función en un punto $\mathbf{x}$ a la expresión:

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

Podemos considerar $(dx_1 = h_1, dx_2 = h_2, \ldots dx_n = h_n)$ como una nueva variable n-dimensional que designaremos por h y poner:

$$dz = \phi(\mathbf{x}, \mathbf{h})$$

y podemos ver que $\phi(\mathbf{x}, \mathbf{h})$ verifica las siguientes propiedades:

1.º *Está definida en el punto* $\mathbf{x}$ *considerado y para todo* $\mathbf{h} \in R^n$.

2.º *Es lineal en la variable* $\mathbf{h}$, *es decir:*

$$\phi(\mathbf{x}, a\mathbf{h} + a'\mathbf{h}) = a\phi(\mathbf{x}, \mathbf{h}) + a'\phi(\mathbf{x}, \mathbf{h}')$$

3.° *Fijado $\varepsilon > 0$, existe un entorno $E[\mathbf{x}, \delta]$ tal que para $\mathbf{y} \in E(\mathbf{x}, \delta)$ es:*

$$|f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) - \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y} - \mathbf{x})| < \varepsilon |\mathbf{y} - \mathbf{x}|$$

Estas propiedades, cuya comprobación es inmediata consecuencia de la definición de diferencial que hemos dado para una función $f(\mathbf{x})$ que tiene derivadas parciales continuas, se pueden tomar como punto de partida para dar una definición más amplia de la diferencial. Diremos, pues, que $z = f(\mathbf{x})$ es una función real que es *diferenciable en* $\mathbf{x}$ si existe una función:

$$\phi(\mathbf{x}, \mathbf{h})$$

que verifica las tres condiciones anteriores.

Partiendo de esta definición se demuestran las siguientes propiedades, que dejamos como ejercicio al lector:

1.° *Si $f(\mathbf{x})$ posee una diferencial $\phi(\mathbf{x}, \mathbf{h})$, existen n números reales:*

$$\phi_1(\mathbf{x}), \phi_2(\mathbf{x}), \ldots, \phi_n(\mathbf{x})$$

tales que:

$$\phi(\mathbf{x}, \mathbf{h}) = \sum_{k=1}^{n} \phi_k(\mathbf{x}) \cdot h_k$$

2.° *Estos números $\phi_k(\mathbf{x})$ son independientes de $\mathbf{h}$ y coinciden con las $\frac{\partial f}{\partial x_k}$.*

3.° *$f(\mathbf{x})$ es continua en $\mathbf{x}$ y verifica la condición de Lipschitz, es decir, existe un número $M > 0$ y un entorno $N(\mathbf{x})$, tal que $y \in N(\mathbf{x})$ implica:*

$$|f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x})| < M |\mathbf{y} - \mathbf{x}|$$

Si definimos como *gradiente* o *vector gradiente* de $f(x)$ a la función vectorial:

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

tendremos la diferencial en forma de producto escalar:

$$dz = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h}$$

y las propiedades 1.° y 2.° pueden enunciarse así:

Si $z = f(\mathbf{x})$ es diferenciable en $\mathbf{x} \in R^n$, 1.° *existe el gradiente $\nabla f(\mathbf{x})$ y se verifica:*

$$dz = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h}$$

2.° *Si existe un vector $G(\mathbf{x})$ tal que:*

$$dz = G(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h}$$

para todo $\mathbf{h} \in R^n$, es $G(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x})$.

6. DERIVADA DIRIGIDA

El plano $y - b = (x - a)\, tg\, \theta$ corta a la superficie en una curva y al plano tangente en la tangente PN a dicha curva. La pendiente de esta tangente suele denominarse *derivada de la función z en la dirección θ o derivada dirigida*. Se designa por $z'_{(\theta)}$.

Su cálculo es inmediato. La ordenada sobre dicha tangente será:

$$z_{(\theta)} = z - c = f'_x(x - a) + f'_y(x - a)\, tg\, \theta$$

Llamando Δr al incremento sobre la recta:

$$y - b = (x - a)\, tg\, \theta$$

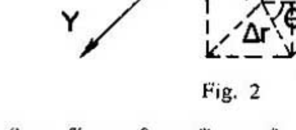


Fig. 2

la pendiente será:

$$\frac{\Delta z_{(\theta)}}{\Delta r} = f'_x \frac{x - a}{\Delta r} + f'_y \frac{x - a}{\Delta r}\, tg\, \theta = f'_x \cos \theta + f'_y \operatorname{sen} \theta$$

es decir:

$$z'_{(\theta)} = f'_x \cos \theta + f'_y \operatorname{sen} \theta$$

EJEMPLO:

La pendiente del paraboloide $z = 2x^3 + y^2$ en el punto (1, 1, 3) en la dirección $tg\, \Theta = 1$, es:

$$z'_{(45^\circ)} = 4 \cos 45^\circ + 2 \operatorname{sen} 45^\circ = 3\sqrt{2}$$

La derivada de la función $f(x, y) = x^2 y$, en la dirección $\Theta = \frac{\pi}{6}$ en el punto (2, 3) es $2 + 6\sqrt{3}$.

Si suponemos que el punto del plano (x, y) se mueve no sobre una recta de pendiente $tg\, \Theta$, sino *sobre una curva* cuya tangente en P_1 tiene pendiente $tg\, \Theta$, si la secante que une P_1 con un punto variable forma un ángulo $\alpha \to \Theta$ cuando $P_2 \to P_1$, tendremos:

$$\frac{\Delta z_{(\alpha)}}{\Delta r} = f' \frac{x - a}{\Delta r} + f' \frac{x - a}{\Delta r}\, tg\, \alpha \to f' \cos \Theta + f' \operatorname{sen} \Theta$$

es decir, la derivada según una curva coincide con la derivada según la tangente a la curva.

EJERCICIOS

1. Sea un cilindro circular recto de 10 m. de altura y 5 m. de radio. Determinar la variación de su volumen cuando se incrementa su altura en 1 dm. y el radio en 2 cm.

2. Calcular la diferencial de las siguientes funciones:

$$z = xy^2 + 2y \operatorname{sen} x; \qquad z = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x}; \qquad z = \sqrt{\frac{x + y}{x - y}}$$

3. Calcular:

$$\Delta z - dz$$

siendo:

$$z = x^2 + y^2 - 3xy, \qquad x = 2, \qquad y = 3, \qquad dx = 0{,}1, \qquad dy = 0{,}01$$

4. Determinar los planos tangentes a las superficies estudiadas en lecciones anteriores.

5. Calcular la diferencial total de:

$$f(x, y) = x^2 \operatorname{sen}(x + y) + y^2 \cos(x + y)$$

Solución:

$$df = [2x \operatorname{sen}(x + y) + x^2 \cos(x + y) - y^2 \operatorname{sen}(x + y)]\, dx + [x^2 \cos(x + y) + \\ + 2y \cos(x + y) - y^2 \operatorname{sen}(x + y)]\, dy$$

6. Hemos supuesto en el § 1 la continuidad de las derivadas parciales para llegar a la noción de diferencial y de plano tangente. Definamos ahora la función:

$$f(0, 0) = 0, \qquad f(x, y) = |x| \text{ para } x - y = 0 \text{ y para } x + y = 0$$

Entre estas dos rectas se define la funcion, de modo que venga representada geométricamente por planos. Compruébese que existen:

$$f'_x(0, 0), \qquad f'_y(0, 0)$$

pero que no son continuas y que no existe plano tangente a la superficie en el punto $(0, 0)$.

7. Determinar las siguientes derivadas direccionales.

a) $f(x, y) = e^{xy}$ en el punto $(1, 1)$ en la dirección que le une con el $(2, 2)$.

b) $f(x, y) = xy$ en el punto $(3, 2)$ en la dirección que une dicho punto con $(0, 0)$.

8. Determinar las derivadas direccionales máxima y mínima y las correspondientes direcciones de las funciones:

a) $$f(x, y) = e^{xy} \text{ en } (-1, -1)$$

b) $$f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2} \text{ en } (1, 1)$$

CAPITULO **26**

Propiedades de las diferenciales y de las derivadas parciales.

1. DERIVADA DE UNA FUNCION COMPUESTA

1.° Sea $z = f(x, y)$ una función de dos variables no independientes, sino que, a su vez, son funciones de otra variable t, a saber:

$$x = x(t) \qquad y = y(t)$$

Supondremos que éstas son derivables y que $z = f(x, y)$ admite derivadas parciales continuas.

Si en la expresión del incremento dividimos por Δt, obtenemos:

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta t} + \frac{\Delta x}{\Delta t} \varepsilon + \frac{\Delta y}{\Delta t} \varepsilon' \qquad [1]$$

Si $\Delta t \to 0$, también $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, $\varepsilon \to 0$, $\varepsilon' \to 0$ y:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \to \frac{dx}{dt}, \qquad \frac{\Delta y}{\Delta t} \to \frac{dy}{dt}$$

de donde resulta:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \qquad [2]$$

es decir, *la derivada de una función compuesta respecto de la variable independiente t es la suma de los productos obtenidos multiplicando las derivadas parciales respecto de las variables intermedias por las derivadas de éstas respecto a t.*

Multiplicando los dos miembros de [2] por dt, se deduce:

$$dx = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \qquad [3]$$

lo que prueba que la expresión de la diferencial es la misma sean o no x e y variables independientes.

2.° Sea $z = f(u, v)$ en que $u = \phi(x, y)$, $v = \psi(x, y)$.

Se demuestra análogamente:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \qquad [4]$$

multiplicando la primera igualdad por dx, la segunda por dy y sumando deducimos:

$$df = \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv$$

es decir, también *en este caso la forma de la diferencial es la misma que si las variables u y v fueran independientes.*

Las derivadas de orden superior de una función compuesta se obtienen por reiterada aplicación de las reglas precedentes, las cuales se generalizan sin dificultad a las funciones de tres o más variables.

EJEMPLO:

Sea $z = f(x, y)$ y supongamos que pasamos a coordenadas polares r, Θ; siendo $x = r \cos \Theta$, $y = r \operatorname{sen} \Theta$, tendremos:

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \cos \Theta + \frac{\partial z}{\partial y} \operatorname{sen} \Theta$$

$$\frac{\partial z}{\partial \Theta} = -\frac{\partial z}{\partial x} r \operatorname{sen} \Theta + \frac{\partial z}{\partial y} r \cos \Theta$$

como es:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \text{y} \qquad \Theta = \operatorname{arc} tg \frac{y}{x}$$

será:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \cos \Theta; \qquad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \operatorname{sen} \Theta$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2} = -\frac{\operatorname{sen} \Theta}{r}$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{\cos \Theta}{r}$$

Teniendo esto en cuenta en las fórmulas (4) resulta:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial r}\cos\Theta - \frac{\partial z}{\partial \Theta}\,\frac{\operatorname{sen}\Theta}{r}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial r}\operatorname{sen}\Theta + \frac{\partial z}{\partial \Theta}\,\frac{\cos\Theta}{r}$$

2. FUNCIONES IMPLICITAS

La intersección de la superficie que representa una función de dos variables $z = f(x, y)$ con el plano $z = 0$, es una curva de ecuación $f(x, y) = 0$.

Por ejemplo: la intersección del paraboloide $z = x^2 + y^2 - 4$ con el plano $z = 0$, es la circunferencia:

$$x^2 + y^2 - 4 = 0$$

En este caso es posible obtener y explícitamente en función de x, a saber:

$$y = \pm\sqrt{4 - x^2}$$

pero, en general, de la relación $f(x, y) = 0$ no se puede o no es fácil obtener y como función explícita de x. En tal caso se dice que $f(x, y) = 0$ define y como *función implícita* de x, si existe (*) una función $y = y(x)$, tal que se verifica idénticamente:

$$f[x, y(x)] \equiv 0$$

No siempre existe tal función, por ejemplo, la función:

$$e^{x^3 + y} = 0$$

no define y como función implícita de x, pues una exponencial nunca es nula.

El siguiente teorema, que no demostramos, da una condición suficiente de existencia: *si $f(x, y)$ se anula en el punto (a, b) y es diferenciable en un entorno de (a, b), y si en dicho entorno $f'_y \neq 0$, existe implícita $y = y(x)$.*

Como en todos los puntos es $f(x, y) = 0$, su diferencial debe ser nula, es decir:

$$f'_x dx + f'_y dy = 0$$

de donde:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x}{f'_y} \quad (\text{supuesto } f'_y \neq 0)$$

(*) Lo que no quiere decir que se sepa construir $y(x)$.

que nos permite calcular la derivada de una función implícita y de la variable independiente x.

EJEMPLO:

$$x^2 + y^2 - 4 = 0$$

$$2xdx + 2ydy = 0 \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} = \frac{-x}{\pm\sqrt{4 - x^2}}$$

Directamente el proceso es más largo:

$$y = \pm\sqrt{4 - x^2}\,; \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{\pm 2\sqrt{4 - x^2}} = -\frac{-x}{\pm\sqrt{4 - x^2}}$$

3. FUNCION IMPLICITA DE VARIAS VARIABLES

Una función de tres variables igualada a cero:

$$F(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

define una de ellas z como función implícita de las otras dos si existe una función $z = z(x, y)$ tal que se verifique idénticamente en un cierto dominio:

$$F[x, y, z(x, y)] \equiv 0$$

Análogamente a como se indicó en el § 2, se ve que no siempre una ecuación $F(x, y, z) = 0$ define z como función implícita de x e y. *Una condición suficiente para que exista z como función implícita en el entorno de un punto x_0, y_0, z_0, en el que $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ es que sea $F(x, y, z)$ diferenciable en un entorno de (x_0, y_0, z_0) y en dicho entorno sea $F'_z \neq 0$.*

Diferenciando tendremos:

$$F'_x dx + F'_y dy + F'_z dz = 0 \tag{2}$$

y si $F'_z \neq 0$, deducimos:

$$dz = -\frac{F'_x}{F'_z}dx - \frac{F'_y}{F'_z}dy \tag{3}$$

y como, por otra parte:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy \tag{4}$$

será:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} \tag{5}$$

La ecuación del plano tangente a la superficie:

$$z = z(x, y)$$

definida por la función: $F(x, y, z) = 0$, será, pues:

$$z - z_0 = -\frac{F'_x}{F'_z}(x - x_0) - \frac{F'_y}{F'_z}(y - y_0) \qquad [6]$$

o bien:

$$(x - x_0)\,F'_x(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0)\,F'_y(x_0, y_0, z_0) + (z - z_0)\,F'_z(x_0, y_0, z_0) = 0 \qquad [7]$$

Como se ve, la ecuación del plano tangente se obtiene sustituyendo en la diferencial [2] las diferenciales dx, dy, dz por las diferencias $x - x_0, y - y_0, z - z_0$.

EJEMPLO:

El plano tangente al elipsoide:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

en el punto (x_0, y_0, z_0), se obtiene diferenciando la ecuación:

$$\frac{2x}{a^2}\,dx + \frac{2y}{b^2}\,dy + \frac{2z}{c^2}\,dz = 0$$

y sustituyendo las diferenciales por las diferencias:

$$x - x_0, \qquad y - y_0, \qquad z - z_0$$

con lo que resulta:

$$\frac{2x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{2y_0}{b^2}(y - y_0) + \frac{2z_0}{c^2}(z - z_0) = 0$$

4. SISTEMAS DE FUNCIONES IMPLICITAS DE VARIAS VARIABLES

Sea un sistema de p ecuaciones con $n + p$ incógnitas:

$$\begin{array}{l} F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n\,;\; y_1, y_2, \ldots, y_p) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_p(x_1, x_2, \ldots, x_n\,;\; y_1, y_2, \ldots, y_p) = 0 \end{array} \qquad [1]$$

Supongamos que se verifican una serie de condiciones suficientes (análogas a las de los párrafos anteriores) para que se puedan considerar las p incógnitas $y_1, \ldots, y_p$ como funciones implícitas de las n variables $x_1, \ldots, x_n$ en el sentido de que al dar valores arbitrarios a éstas (dentro de un cierto campo) las expresiones:

$$\begin{matrix} y_1(x_1, \ldots, x_n) \\ y_2(x_1, \ldots, x_n) \\ \cdots\cdots\cdots \\ y_p(x_1, \ldots, x_n) \end{matrix} \qquad [2]$$

verifiquen idénticamente el sistema [1] en el campo considerado.

Admitiendo que éstas sean continuas y derivables, derivando por el teorema de las funciones compuestas respecto a las incógnitas x_m, tendremos:

$$\begin{matrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_h} + \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} \cdot \dfrac{\partial y_1}{\partial x_h} + \ldots + \dfrac{\partial F_1}{\partial y_p} \cdot \dfrac{\partial y_p}{\partial x_h} = 0 \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x_h} + \dfrac{\partial F_2}{\partial y_1} \cdot \dfrac{\partial y_1}{\partial x_h} + \ldots + \dfrac{\partial F_2}{\partial y_p} \cdot \dfrac{\partial y_p}{\partial x_h} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial F_p}{\partial x_h} + \dfrac{\partial F_p}{\partial y_1} \cdot \dfrac{\partial y_1}{\partial x_h} + \ldots + \dfrac{\partial F_p}{\partial y_p} \cdot \dfrac{\partial y_p}{\partial x_h} = 0 \\ (h = 1, 2, \ldots, n) \end{matrix} \qquad [3]$$

Si suponemos que el llamado *jacobiano* o *determinante funcional* del sistema es distinto de cero:

$$\frac{\partial(F_1, F_2, \ldots, F_p)}{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_p)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial F_p}{\partial y_1} & \dfrac{\partial F_p}{\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial F_p}{\partial y_p} \end{vmatrix} \neq 0$$

se pueden calcular, resolviendo el sistema lineal [3], las derivadas:

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_h}, \frac{\partial y_2}{\partial x_h}, \ldots, \frac{\partial y_p}{\partial x_h} \; (h = 1, 2, \ldots, n)$$

Geométricamente, en el caso del espacio de tres dimensiones esto se traduce en lo siguiente. Si dos superficies de ecuaciones:

$$F_1(x, y, z) = 0$$
$$F_2(x, y, z) = 0$$

tienen una línea de intersección, a lo largo de ella dos de las variables se pueden considerar como funciones implícitas de la otra.

Si el determinante $\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(y, z)} \neq 0$, el sistema:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial F_1}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dx} = 0$$
$$\frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial F_2}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dx} = 0$$

nos permite calcular: dy/dx, dz/dx.

EJEMPLO:

El paraboloide:

$$z = 2x^2 - y^2$$

y la esfera:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2y = 0$$

pasan por el origen de coordenadas. En dicho punto existen y, z como funciones implícitas de x, pues el jacobiano es:

$$\left[\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(y, z)}\right]_{(0,\,0)} = \begin{vmatrix} 2y - 2 & 2z \\ -2y & -1 \end{vmatrix}_{(0,\,0)} \neq 0$$

lo cual permite calcular:

$$\frac{dy}{dx}, \quad \frac{dz}{dx}$$

5. DEPENDENCIA FUNCIONAL

Se dice que p funciones:

$$z_1 = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
$$z_2 = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$z_p = f_p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

definidas todas ellas en un campo o recinto C del espacio de n dimensiones, son *funcionalmente dependientes* si en dicho campo se verifica la identidad:

$$F[f_1(x_1, \ldots, x_n), f_2(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_p(x_1, \ldots, x_n)] \equiv 0 \qquad [1]$$

EJEMPLO:

$$z_1 = x_1 + x_2 + x_3$$
$$z_2 = x_3$$
$$z_3 = e^{x_1 + x_2 + 2x_3}$$

son dependientes en el campo:

$$-\infty < x_1 < \infty$$
$$-\infty < x_2 < \infty$$
$$-\infty < x_3 < \infty$$

pues se verifica:

$$z_3 = e^{z_1 + z_2}$$

En el caso de que no se verifique [1] se dicen las p funciones *funcionalmente independientes.*

Se demuestra que si existen las derivadas parciales en el campo C, *el número de funciones independientes entre sí es igual a la característica de la matriz jacobiana del sistema:*

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f_p}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_p}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_p}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

En particular, si las funciones son n, la matriz es cuadrada, y *si el determinante no es nulo, las funciones son independientes.*

EJEMPLOS:

1. Si:

$$x = \alpha u + \beta v$$
$$y = \gamma u + \delta v$$

y

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta$$

son constantes, resulta:

$$D = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \alpha\delta - \beta\gamma$$

Si $D = 0$, se tiene:

$$\gamma x - \alpha y = 0$$

o bien:

$$\delta x - \beta y = 0$$

es decir, x e y no son independientes.

2. Las funciones:

$$z_1 = x^2 + y^2, \qquad z_2 = 2xy, \qquad z_3 = (x + y)^4$$

tiene como matriz jacobiana:

$$\begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2y & 2x \\ 4(x + y)^3 & 4(x + y)^3 \end{pmatrix}$$

la cual tiene como característica 2, ya que el determinante:

$$\begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 2y & 2x \end{vmatrix} \neq 0$$

Hay, pues, dos independientes. Se comprueba que existe la relación:

$$z_3 = (z_1 + z_2)^2$$

EJERCICIOS

1. Obtener las ecuaciones de los planos tangentes a la esfera:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2y = 0$$

en el origen.

2. Determinar:

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}$$

para las funciones implícitas definidas por el sistema:

$$x + 4y - z + u = k_1$$
$$xyzu = k_2$$

3. Dada la ecuación de la esfera:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$$

que define z como función implícita de x e y, calcular:

$$z''_{xx}, \quad z''_{xy}, \quad z''_{yy}$$

Solución:

$$z''_{xx} = -\frac{x^2 + z^2}{z^3}; \qquad z''_{xy} = -\frac{xy}{z^3}; \qquad z''_{yy} = -\frac{y^2 + z^2}{z^3}$$

4. Dado el folium de Descartes:

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0$$

obtener y'.

Solución:

$$y' = -\frac{x^2 - ay}{y^2 - ax}$$

CAPITULO **27**

Funciones homogéneas

1. DEFINICION

La función z de n variables:

$$z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

se dice homogénea si se verifica que:

$$f(hx_1, hx_2, \ldots, hx_n) = h^p f(x_1, \ldots, x_n) \qquad [1]$$

es decir, al multiplicar las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ por un número h, resulta el valor de la función z, multiplicada por una potencia de h, cuyo exponente p se llama grado de homogeneidad de la función.

Si $f(x, y, z) = 0$ es una función homogénea de tres variables, se verifica:

$$f(kx, ky, kz) \equiv k^p f(x, y, z) = 0$$

luego, si consideramos la representación cartesiana, esta superficie tiene la propiedad de que si pertenece a ella el punto (x, y, z) también pertenece el (kx, ky, kz), cualquiera que sea k, es decir, se trata de una *superficie cónica* con vértice en el origen.

EJEMPLO:

$$z = f(x, y, u) = 2(x^5 + y^5 + u^5) + 4x(y^4 + u^4) + x^2(x^3 + y^3)$$

Multiplicando x, y, u, por h, resulta:

$$2(x^5h^5 + y^5h^5 + u^5h^5) + 4xh(y^4h^4 + u^4h^4) + x^2h^2(x^3h^3 + y^3h^3) = 2h^5(x^5 + y^5 + u^5) +$$
$$+ 4h^5x(y^4 + u^4) + h^5x^2(x^3 + y^3) = h^5[2(x^5 + y^5 + u^5) + 4x(y^4 + u^4) + x^2(x^3 + y^3] =$$
$$= h^5z$$

2. HOMOGENEIDAD DE LAS DERIVADAS PARCIALES DE UNA FUNCION HOMOGENEA

Sea $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ una función homogénea de grado p, es decir, tal que:

$$f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = t^p f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad [1]$$

Si derivamos los dos miembros de [1] respecto de x_k por la regla de las funciones compuestas, se tendrá:

$$t f'_{x_k}(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = t^p f'_{x_k}(x_1, \ldots, x_n)$$

de donde:

$$f'_{x_k}(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = t^{p-1} f'_{x_k}(x_1, \ldots, x_n)$$

que nos indica que las derivadas parciales primeras de una función homogénea de grado p, son funciones homogéneas de grado $p - 1$.

Si aplicamos esta propiedad a las derivadas parciales primeras, obtendremos que las segundas serán homogéneas y, en general, *las derivadas parciales de orden r de una función homogénea de grado p son funciones homogéneas de grado $p - r$.*

3. TEOREMA DE EULER

La suma de los productos de las primeras derivadas parciales de una función homogénea por sus variables respectivas, es igual al producto de la función por su grado de homogeneidad.

Derivando la igualdad [1] del párrafo 2 respecto a t, por la regla de las funciones compuestas, será:

$$\frac{\partial f(tx_1, \ldots, tx_n)}{\partial(tx_1)} x_1 + \frac{\partial f(tx_1, \ldots, tx_n)}{\partial(tx_2)} x_2 + \ldots + \frac{\partial f(tx_1, \ldots, tx_n)}{\partial(tx_n)} x_n =$$

$$= pt^{p-1} f(x_1, \ldots, x_n)$$

y haciendo $t = 1$, queda:

$$\frac{\partial f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_2} x_2 + \ldots + \frac{\partial f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_n} x_n =$$

$$= pf(x_1, \ldots, x_n)$$

o abreviadamente:

$$x_1 f'_1 + x_2 f'_2 + \ldots + x_n f'_n = p \cdot f \qquad [1]$$

que es el teorema de Euler.

Se demuestra fácilmente el recíproco, es decir, que *si una función verifica la condición* [1] *es necesariamente homogénea.*

EJEMPLOS:

1. Comprobar el teorema de Euler en la función homogénea:

$$u = f(x, y, z) = 4x^5 - 2xyz^3 + 3xy^4 - z^4y + y^5$$

se tiene:

$$f'_x = 20x^4 - 2yz^3 + 3y^4$$
$$f'_y = -2xz^3 + 12xy^3 - z^4 + 5y^4$$
$$f'_z = -6xyz^2 - 4z^3y$$

y sustituyendo en (1), será:

$$x(20x^4 - 2yz^3 + 3y^4) + y(-2xz^3 + 12xy^3 - z^4 + 5y^4) + z(-6xyz^3 - 4z^3y) =$$
$$= 20x^5 - 2xyz^3 + 3xy^4 - 2xyz^3 + 12xy^4 - yz^4 + 5y^5 - 6xyz^3 - 4z^4y =$$
$$= 20x^5 - 10xyz^3 + 15xy^4 - 5z^4y + 5y^5 = 5(4x^5 - 2xyz^3 + 3xy^4 - z^4y + y^5) = 5u$$

luego se verifica el teorema de Euler.

2. Aplicando el teorema de Euler, comprobar la homogeneidad de la función:

$$z = f(x, y) = \sqrt{x^3 + y^3}$$

$$f'_x = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 + y^3}} \qquad f'_y = \frac{3y^2}{2\sqrt{x^3 + y^3}}$$

$$\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 + y^3}}\,x + \frac{3y^2}{2\sqrt{x^3 + y^3}}\,y = \frac{3}{2}\,\frac{x^3 + y^3}{\sqrt{x^3 + y^3}} = \frac{3}{2}\sqrt{x^3 + y^3} = \frac{3}{2}\,z$$

que nos dice que z es homogénea de grado 3/2.

4. GENERALIZACION

El teorema de Euler se generaliza a las derivadas n-ésimas, como el lector puede comprobar fácilmente.

Su expresión simbólica en el caso de dos variables es:

$$\left(x\,\frac{\partial f}{\partial x} + y\,\frac{\partial f}{\partial y} \right)^{(n)} = p(p - 1) \ldots (p - n + 1)\,f(x, y)$$

En particular, para $n = 2$:

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial ef}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = m(m - 1)f(x, y)$$

EJERCICIOS

1. Determinar el grado de la función homogénea:

$$\frac{x}{x^2 + y^2}$$

y aplicable el teorema de Euler.

2. Demostrar el recíproco del teorema de Euler con la siguiente indicación:
Se trata de probar que la función:

$$g(t) = t^p f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - f(tx_1, \ldots, tx_n)$$

es nula para todo valor de t. Es inmediato que $g(1) = 0$, y derivando resulta:

$$g'(t) - g(t)\frac{p}{t}; \text{ etc.}$$

3. Demostrar que la función:

$$f(x, y) = \frac{x\sqrt{x^2 + y^2} + y\sqrt{x^2 - y^2}}{x + y}$$

es homogénea y aplicar los teoremas de Euler, etc.

CAPITULO **28**

Fórmula de Taylor

1. DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR

Se define la diferencial de 2.° orden como diferencial de la diferencial:

$$d^2z = d(dz) = \frac{\partial(dz)}{\partial x}\,dx + \frac{\partial(dz)}{\partial y}\,dy$$

Como dx, dy son independientes de x e y, se pueden considerar como constantes, con lo que resulta:

$$\frac{\partial(dz)}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,dx + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\,dy$$

$$\frac{\partial(dz)}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\,dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,dy$$

luego:

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,dx^2 + 2\,\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\,dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,dy^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy\right)^{(2)}$$

en la que el cuadrado anterior es simbólico y representa abreviadamente el término central de la igualdad.

Del mismo modo se ve, en general, que:

$$d^nz = d(d^{n-1}z) = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy\right)^{(n)} =$$

$$= \frac{\partial^n z}{\partial x^n}\,dx^n + \binom{n}{1}\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1}\partial y}\,dx^{n-1}dy + \dots + \frac{\partial^n z}{\partial y^n}\,dy^n.$$

La generalización a más de dos variables es inmediata.

EJEMPLOS:

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2}$$

$$d^2\left(\frac{x}{y}\right) = -2\frac{dy}{y^2}(ydx - xdy)$$

Esto permite el cálculo de las derivadas de orden superior. Tenemos:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{x}{y}\right) = 0; \qquad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{-1}{y^2}; \qquad \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{2x}{y^3}$$

2. FORMULA DE TAYLOR

Lo mismo que en las funciones de una variable, aquí se trata de expresar el valor de la función indefinidamente derivable $z = f(x, y)$ en el punto $(a + h, b + k)$ cuando se conoce el valor en el punto (a, b) y la fórmula consiste en una suma de potencias de los incrementos h, k, afectados de unos ciertos coeficientes más un resto.

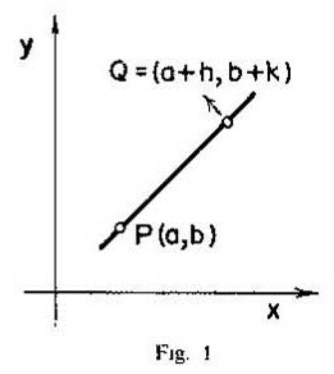


Fig. 1

Para obtener la fórmula observemos, que el paso de:

$$P(a, b) \text{ a } Q(a + h, b + k)$$

podemos considerarlo como caso particular del paso de P a un punto cualquiera de la recta PQ. Un punto cualquiera de la recta PQ tiene coordenadas $a + ht$, $b + kt$, y se obtiene Q para $t = 1$.

La función $f(a + ht, b + kt) = F(t)$ es, en rea lidad, una función sólo de t, indefinidamente derivable, luego se le puede apli car la fórmula de MacLaurin, la cual nos da:

$$F(t) = F(0) + \frac{F'(0)}{1!}t + \frac{F''(0)}{2!}t^2 + \dots + \frac{F^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}t^{n-1} + \frac{F^{(n)}(\zeta)}{n!}t^n$$

Estas derivadas son:

$$F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial y}k$$

$$F''(t) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}k^2$$

....

$$F^{(n-1)}(t) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial y}k\right)^{(n-1)}$$

Para $t = 0$ queda:

$$F'(0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(a,\,b)} h + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(a,\,b)} k = (dz)_{(a,\,b)}$$

$$F''(0) = (d^2z)_{(a,\,b)}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

y, por tanto:

$$f(a + h, b + k) = F(1) = f(a, b) + \frac{(dz)_{(a,\,b)}}{1!} +$$

$$+ \frac{(d^2z)_{(a,\,b)}}{2!} + \dots + \frac{(d^{n-1}z)_{(a,\,b)}}{(n-1)!} + \frac{(d^nz)_{(\lambda,\,\mu)}}{n!}$$

Tomando los dos primeros términos, resulta:

$$f(a + h, b + k) - f(a, b) = (dz)_{(\lambda,\,\mu)}$$

que es el llamado *teorema del valor medio.*

EJEMPLO:

Sea desarrollar la función $z = e^{x+y}$ en el origen (0, 0).

Como todas las derivadas parciales son e^{x+y}, tendremos:

$$e^{x+y} = 1 + (x + y) + \frac{1}{2!}(x^2 + 2xy + y^2) + \dots +$$

$$+ \frac{1}{(n-1)!}(x + y)^{n-1} + \frac{1}{n!}(x + y)^n e^{\theta(x+y)}$$

3. GENERALIZACION A n VARIABLES

El razonamiento aplicado a dos variables es válido para n, y se obtienen, análogamente:

$$f(a + h, b + k, \dots, d + m) = f(a, b, \dots, d) + \frac{(dz)_{(a,\,b,\,\dots,\,d)}}{1!} +$$

$$+ \frac{(d^2z)_{(a,\,b,\,\dots,\,d)}}{2!} + \dots + \frac{(d^{n-1}z)_{(a,\,b,\,\dots,\,d)}}{(n-1)!} + \frac{(d^nz)_{(\lambda,\,\mu,\,\dots,\,\delta)}}{n!}$$

Como caso particular se obtiene:

$$f(a + h, b + k, \dots, d + m) - f(a, b, \dots, d) = (dz)_{(\lambda,\,\mu,\,\dots,\,\delta)}$$

que es el *teorema del valor medio*. Este teorema no tiene un análogo para las funciones vectoriales.

EJERCICIOS

1. Desarrollar por la fórmula de Taylor, en el punto (0, 0) la función.

$$f(x, y) = \operatorname{tg} y \cdot \sqrt{x}$$

2. Idem. la función:

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{1-x} + \sqrt{1-y}}{1 + \sqrt{(1-x)(1-y)}}$$

3. Ordenar $z = x^3 + xy^2 + y^3$ según potencias de $x - 1$, $y - 1$.

   Solución:

   Basta desarrollar en el entorno de:

$$(x - 1, \qquad y - 1)$$

4. Determinar el centro de la curva de ecuación:

$$x^2 + 2xy + 3x + y - 4 = 0$$

   Solución:

   Basta desarrollar en potencias de:

$$(x - a, \qquad y - b)$$

y expresar que los términos de primer grado son nulos, como puede fácilmente razonar el lector.

5. Determinar el centro, si existe, de la superficie:

$$x^2 - 3xy + yz + z^2 + 4y = 0$$

6. Desarrollar por la fórmula de Taylor la función:

$$z = \ln (x + 2) \cdot \operatorname{tg} y$$

para:

$$x = -1 + h \qquad \text{e} \qquad y = \frac{\pi}{3} + k$$

calculando hasta los términos de tercer orden.

7. Idem. para función $z = e^x$ sen xy en el punto:

$$\left(\ln 3, \frac{\pi}{6} \right)$$

CAPITULO **29**

Máximos y mínimos

1. MAXIMOS Y MINIMOS DE FUNCIONES DE DOS VARIABLES

Una función $z = f(x, y)$ *se dice que tiene un* $\begin{matrix} \textit{máximo} \\ \textit{mínimo} \end{matrix}$ *relativo en un punto* (a, b), *si el valor que toma en dicho punto es* $\begin{matrix} \textit{mayor} \\ \textit{menor} \end{matrix}$ *que los que toma en un entorno de* (a, b).

En símbolos:

$$\textit{Máximo si } f(a + h, b + k) < f(a, b) \qquad [1]$$

para puntos cuya distancia a (a, b) es menor que δ, es decir,

$$h^2 + k^2 < \delta^2$$

$$\textit{Mínimo si } f(a + h, b + k) > f(a, b) \qquad [2]$$

para puntos cuya distancia a (a, b) es menor que δ, es decir,

$$h^2 + k^2 < \delta^2$$

Si se considera en vez de [1] la relación:

$$f(a + h, b + k) \leq f(a, b)$$

el máximo se dice en sentido *amplio*, y en el caso de la relación [1] en sentido *estricto*.

Análogamente, para el mínimo.

Fijado $y = b$, es condición necesaria para que la función de una variable $f(x, b)$ tenga un máximo o un mínimo en (a, b) que sea:

$$f'_x(a, b) = 0$$

Análogamente, se obtiene la condición:

$$f'_y(a, b) = 0$$

Geométricamente, estas condiciones necesarias de extremo expresan que el plano tangente a la superficie debe ser paralelo al plano XY, o, lo que es lo mismo, la diferencial total ha de ser nula.

La función tendrá máximo o mínimo según que la superficie esté por debajo (b) o por encima (a) del plano tangente.

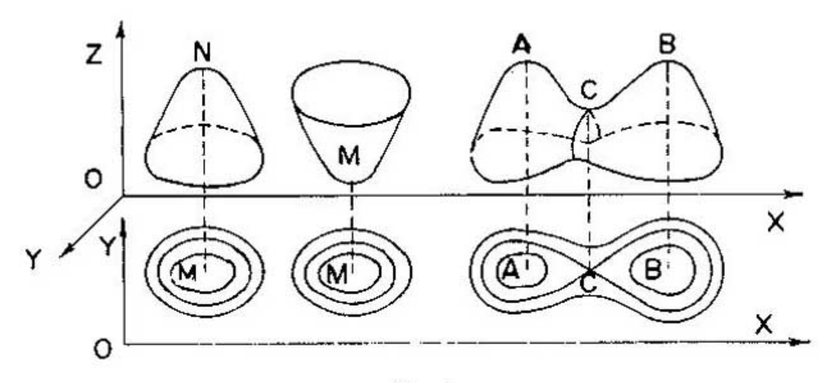


Fig. 1

Dichas condiciones no son suficientes, pues el plano tangente puede atravesar la superficie (c).

Tales puntos en que no hay máximo ni mínimo se llaman *puntos de silla* (por la forma de la superficie en ellos, parecida a una silla de montar) o *puertos*.

En las funciones de una variable, la distinción de los diversos casos se hacía atendiendo al signo de la derivada segunda. Aquí hay que considerar análogamente el signo del llamado determinante *hessiano*, como luego veremos.

EJEMPLO:

Se desea construir una caja paralelepipédica abierta de volumen máximo, suponiéndola de área constante a.

Si llamamos x, y, z las tres dimensiones de la caja, se tendrá:

$$xy + 2xz + 2yz = a$$

Como el volumen V es:

$$V = x \cdot yz = \frac{axy - x^2y^2}{2(x + y)}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{(a - 2xy - x^2)y^2}{2(x + y)^2}; \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{(a - 2xy - y^2)x^2}{2(x + y)^2}$$

Como el volumen ha de ser máximo, no puede ser $x = 0$, $y = 0$, luego tendrá que ser

$$a - 2xy - x^2 = 0$$
$$a - 2xy - y^2 = 0$$

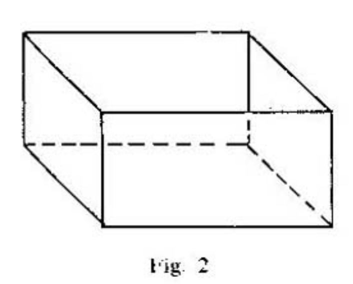


Fig. 2

La única solución positiva del sistema es

$$x = y = \sqrt{\frac{a}{3}}$$

y, por tanto:

$$z = \frac{a - xy}{2(x + y)} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{a}{3}}$$

Por la naturaleza del problema no son precisas nuevas consideraciones para ver que estos valores dan el máximo volumen.

2.° Suponiendo tres ciudades A, B, C, determinar el emplazamiento de una fábrica para que sea mínima la suma de distancias a las mismas. (Problema de Steiner.)

Solución:

Sean (a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3) las coordenadas de los puntos A, B, C, y (x, y) las de la fábrica.

Habrá, por consiguiente, que hacer mínima la función:

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{3} \sqrt{(x - a_i)^2 + (y - b_i)^2}$$

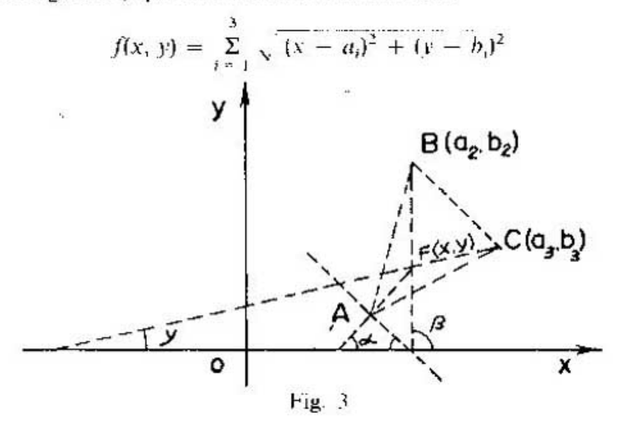


Fig. 3

Uniendo el punto F con los A, B, C, y llamando α, β, γ, los ángulos que forman estas rectas con el eje X. Como para hallar el mínimo hay que anular las derivadas parciales, se tendrá:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x - a_1}{\sqrt{(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2}} + \frac{x - a_2}{\sqrt{(x - a_2)^2 + (y - b_2)^2}} +$$

$$+ \frac{x - a_3}{\sqrt{(x - a_3)^2 + (y - b_3)^2}} = \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 0$$

y como la posición de los ejes puede elegirse arbitrariamente, si hacemos que coincida uno de ellos con cada una de las rectas FA, FB, o FC, se tendrá:

$$\cos \alpha_1 + \cos \beta_2 = -1$$

$$\cos \alpha_1 + \cos \gamma_3 = -1$$

$$\cos \beta_2 + \cos \gamma_3 = -1$$

y, por tanto, ha de ser $\alpha_1 = \beta_2 = \gamma_3$; por consiguiente, las tres rectas han de formar entre sí el mismo ángulo.

El mínimo lo da el punto desde el cual se ven los tres lados del triángulo bajo el mismo ángulo (120°).

Este punto se construye fácilmente si los tres ángulos del triángulo son menores de 120°, pero si uno de ellos A, es mayor, el punto no existe. En este caso, el mínimo tiene lugar cuando F coincide con A (*).

2. MAXIMOS Y MINIMOS DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

Las definiciones anteriores se generalizan al caso de funciones de n variables:

$$z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Hay un *máximo relativo* en sentido estricto, en un punto $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ si en un entorno de dicho punto es:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) < f(a_1, a_2, \ldots, a_n) \qquad [1]$$

Si ponemos $\leqslant$ el máximo se dice en sentido amplio.

Análogamente, si en el entorno es:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) > f(a_1, a_2, \ldots, a_n) \qquad [2]$$

se dice *mínimo relativo* en sentido estricto. Y si el signo es $\geq$, en sentido amplio.

(*) Este problema, de interés en Economía, ha sido generalizado por D. A. Scates. (Véase *Metron*, 1933.)

Fijadas $n - 1$ variables, por ejemplo, $x_2 = a_2$; $x_3 = a_3$; ...; $x_n = a_n$, se obtiene una función:

$$f(x_1, a_1, ..., a_n)$$

de una variable y una condición necesaria de extremo en ésta, y, por tanto, de la función de n variables, es:

$$f'_{x1}(a_1, ..., a_n) = 0 \qquad [3]$$

Análogamente, se obtienen:

$$f'_{x2}(a_1, ..., a_n) = 0; ...; f'_{xn}(a_2, ..., a_n) = 0 \qquad [3]$$

Estas condiciones [3] son equivalentes a poner:

$$[df(x_1, ..., x_n)]_{a_1, ..., a_n)} = 0 \qquad [4]$$

es decir, la anulación de la diferencial total es una condición necesaria de extremo.

Como en las funciones de dos variables, esta condición no es suficiente para asegurar la existencia de máximo o mínimo, pues puede ocurrir que en todo entorno de:

$$(a_1, ..., a_n)$$

haya puntos en que sea:

$$f(x_1, ..., x_n) > f(a_1, ..., a_n)$$

y puntos en que se verifique:

$$f(x_1, ..., x_n) < f(a_1, ..., a_n)$$

Tales puntos se llaman de *silla* o *puertos.*

3. DISCUSION

Resolviendo el sistema [3] de n ecuaciones con n variables, y suponiendo que una solución del sistema sea:

$$(a_1, a_2, ..., a_n)$$

en este punto puede haber un máximo, un mínimo o un punto de silla.

Si desarrollamos por la fórmula de Taylor en el entorno del punto $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, resultará:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(a_1, a_2, \ldots, a_n) +$$

$$+ h_1 f'_{x_1}(a_1, a_2, \ldots, a_n) + h_2 f'_{x_2}(a_1, a_2, \ldots, a_n) + \ldots +$$

$$+ h_n f'_{x_n}(a_1, a_2, \ldots, a_n) + \frac{1}{2!}\left[h_1^2 f''_{x_1^2}(a_1, a_2, \ldots, a_n) +\right.$$

$$+ h_2^2 f''_{x_2^2}(a_1, a_2, \ldots, a_n) + \ldots + h_n^2 f''_{x_n^2}(a_1, a_2, \ldots, a_n) +$$

$$+ 2h_1 h_2 f''_{x_1 x_2}(a_1, a_2, \ldots, a_n) + 2h_1 h_3 f''_{x_1 x_3}(a_1, a_2, \ldots, a_n) + \ldots +$$

$$\left. + 2h_{n-1} h_n f''_{x_{n-1} x_n}(a_1, a_2, \ldots, a_n)\right] + \frac{1}{3!}(d^3 f)_{(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)}$$

siendo:

$$x_1 = a_1 + h_1;\ x_2 = a_2 + h_2;\ \ldots;\ x_n = a_n + h_n \qquad [2]$$

y

$$\begin{array}{c} a_1 < \xi_1 < a_1 + h_1 \\ a_2 < \xi_2 < a_2 + h_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_n < \xi_n < a_n + h_n \end{array} \qquad [3]$$

Si pasamos $f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ al primer miembro, como los términos correspondientes a las derivadas primeras son nulos (por las condiciones [3]), y los términos de las derivadas terceras forman una suma de infinitésimos de orden superior a los de las segundas derivadas, como:

$$h_1 \to 0;\ \ldots;\ h_n \to 0$$

resultará que, en un cierto entorno de $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, el signo de $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ será el mismo de:

$$\frac{1}{2!}\left[h_1^2 f''_{x_1^2}(a_1, a_2, \ldots, a_n) + \ldots + h_n^2 f''_{x_n^2}(a_1, \ldots, a_n) +\right.$$

$$\left. + 2h_1 h_2 f''_{x_1 x_2}(a_1, \ldots, a_n) + \ldots + 2h_{n-1} h_n f''_{x_{n-1} x_n}(a_1, \ldots, a_n)\right] \qquad [4]$$

que es una forma cuadrática en las n variables $h_1, h_2, \ldots, h_n$.

El discriminante de la forma es el llamado *hessiano* de la función, a saber

$$H_n = \begin{vmatrix} f''_{x_1^2} & f''_{x_1 x_2} & \cdots & f''_{x_1 x_n} \\ f''_{x_1 x_2} & f''_{x_2^2} & \cdots & f''_{x_2 x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f''_{x_1 x_n} & f''_{x_2 x_n} & \cdots & f''_{x_n^2} \end{vmatrix}$$

Formemos, además, el H_{n-1} (determinante obtenido suprimiendo en H_n las últimas fila y columna); el H_{n-2} (deducido suprimiendo en H_n las dos últimas filas y columnas), y así sucesivamente hasta el H_1.

Escribiremos la sucesión que comienza por la unidad y continúa con H_1, H_2, ..., H_{n-1}, H_n, así:

$$1, H_1, H_2, H_3, \ldots, H_{n-1} \; H_n \qquad [5]$$

Por simple aplicación de los resultados relativos a la clasificación de las formas cuadráticas (*), obtenemos la siguiente clasificación de máximos, mínimos y puntos de silla:

1.° Si todos los términos de [5] son positivos, la forma será definida positiva, luego:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n) > 0$$

y habrá un *mínimo* en el punto $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

2.° Si los términos son alternativamente positivos y negativos, la forma será definida negativa, luego:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n) < 0$$

y habrá un *máximo* en el punto $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

3.° Si los términos son unos positivos y otros negativos en un orden distinto del anterior, pero ninguno nulo, la forma será indefinida y habrá un *punto de silla*.

(*) Ver SIXTO RIOS, *Algebra lineal*, Madrid, 1970

4.° Si alguno de los términos es nulo (pero no todos), la forma será semidefinida o indefinida y no habrá máximos ni mínimos en sentido estricto.

5.° Si todos los términos son nulos, este procedimiento no tiene aplicación y habrá que prolongar el desarrollo de Taylor con nuevos términos; pero la discusión se complica y prescindimos de ella.

Conviene observar que en el caso 4.° puede haber un punto de silla, lo cual se comprobará dando valores particulares a las variables.

En el caso particular de las funciones de dos variables, la sucesión de determinantes es:

$$1, \; f''_{x_1^2}, \quad \begin{vmatrix} f''_{x_1^2} & f''_{x_1 x_2} \\ f''_{x_1 x_2} & f''_{x_2^2} \end{vmatrix} = H_2$$

EJEMPLOS:

1.°) Hallar los extremos de la función:

$$u = x + 2z + yz - x^2 - y^2 - z^2$$

a) Se calculan las derivadas parciales primeras y se igualan a cero:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 - 2x = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = z - 2y = 0 \qquad [1]$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 2 + y - 2z = 0$$

b) Se resuelve el sistema [1], con lo que se obtiene el punto (1/2, 2/3, 4/3), en el que puede haber máximo, mínimo o punto de silla.

c) Se calculan las derivadas parciales segundas:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -2 \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2 \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} = 1 \qquad [2]$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -2 \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = 0$$

d) Se forma el Hessiano, que será el siguiente:

$$H_3 = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -8 + 2 = -6$$

a partir del cual se forma la sucesión:

$$1, \qquad -2, \qquad 4, \qquad -6$$

Como son alternativamente positivos y negativos, habrá un máximo en el punto (1/2, 2/3, 4/3).

2.º) Hallar los máximos y mínimos de la función:

$$z = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y + \operatorname{sen} (x + y)$$

a)

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos x + \cos (x + y) = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \cos y + \cos (x + y) = 0$$

b)

$$\cos x = \cos y \qquad x = y$$

$$\cos x + \cos 2x = 0 \qquad \cos x + \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 0$$

$$\cos x + \cos^2 x - 1 + \cos^2 x = 0$$

$$2 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0$$

$$\cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{4} = \begin{cases} \cos x_1 = 1/2 \\ \cos x_2 = -1 \end{cases}$$

de donde:

$$x_1 = \frac{\pi}{3} \qquad x_2 = \pi$$

luego los puntos serán:

$$(\pi/3, \pi/3) \qquad \text{y} \qquad (\pi, \pi)$$

c)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} (x + y); \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\operatorname{sen} (x + y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\operatorname{sen} y - \operatorname{sen} (x + y)$$

Para $(x, y) = (\pi/3, \pi/3)$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\sqrt{3}$$

Para $(x, y) = (\pi, \pi)$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0 \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

d) y *e*):

$$H_2 = \begin{vmatrix} -\sqrt{3} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\sqrt{3} \end{vmatrix} = 3 - \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad H_1 = 0$$

f)

$$1, \quad -\sqrt{3}, \quad 9/4$$
$$1 \quad 0 \quad 0$$

g) Como en la primera sucesión los signos son alternativamente positivos y negativos, habrá un máximo en el punto $(\pi/3, \pi/3)$.

Como en la segunda sucesión todos los términos son nulos, no hay máximos ni mínimos en sentido estricto.

3.º) Hallar los máximos y mínimos de la función:

$$F = x^2 + y^2 - xy + xz - z^2 + 2z$$

a)

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x - y + z = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -x + 2y = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = x - 2z + 2 = 0$$

b)

$$x = -1/2; \qquad y = -1/4; \qquad z = 3/4$$

Punto:

$$(-1/2, \quad -1/4, \quad 3/4)$$

c)

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2 \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2 \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = -2$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -1 \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} = 0 \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x} = 1$$

d) y *e*)

$$H_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -8 - 2 + 2 = -8$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3$$

$$H_1 = 2$$

f)

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad -8$$

g) *Punto de silla* en $(-1/2, \quad -1/4, \quad 3/4)$.

EJERCICIOS

1. Máximos y mínimos de:

$$z = x^4 + y^4 - 4a^2xy + 8a^4$$

Solución:
Dos mínimos en $x = y = \pm a$ y un punto de silla en el origen.

2. Determinar los extremos de la función:

$$f(x, y) = \frac{x + y - 1}{x^2 + y^2}$$

Solución:
Un máximo para $x = y = 1$.

3. Determinar los extremos de la función:

$$z = x^4 + x^2y + y^2$$

Solución:
Un mínimo no estricto en el origen.

4. Determinar los extremos de la función:

$$f(x, y) = y^2 + x^2y$$

Solución:
Un mínimo no estricto en el origen.

5. Dados cuatro puntos en el espacio encontrar un punto cuya suma de distancias a los mismos sea mínima.

CAPITULO **30**

Extremos condicionados

1. UN CASO PARTICULAR

Se presenta frecuentemente el problema de determinar los máximos y mínimos de una función de tres variables:

$$W = f(x, y, z) \qquad [1]$$

que en realidad es una función de dos variables, si suponemos que las tres variables no son independientes, sino que están ligadas por una relación:

$$\phi(x, y, z) = 0 \qquad [2]$$

Para tener condiciones necesarias de extremo, hemos de igualar a cero la diferencial total de W considerada como función de las dos variables x, y, es decir.

$$dW = \frac{\partial W}{\partial x} dx + \frac{\partial W}{\partial y} dy = 0 \qquad [3]$$

Diferenciando la [1] y la [2], se deduce:

$$dW = f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz \qquad [4]$$

$$\phi'_x \, dx + \phi'_y \, dy + \phi'_z \, dz = 0 \qquad [5]$$

Multiplicando la [5] por un coeficiente arbitrario y sumando a la [4], resulta:

$$dW = (f'_x + \lambda\phi'_x)\, dx + (f'_y + \lambda\phi'_y)\, dy + (f'_z + \lambda\phi'_z)\, dz$$

Dando a λ el valor: $\lambda = - f'_z \phi'_z$ queda:

$$dW = (f'_x + \lambda\phi'_x)\, dx + (f'_y + \lambda\phi'_y)\, dy$$

y esta es la diferencia total de W, considerada como función de dos variables, ya que es de la forma [3].

Su anulación, que es necesaria para el máximo, equivale a las condiciones:

$$f'_x + \lambda\phi'_x = 0 \qquad f'_y + \lambda\phi'_y = 0$$

Estas dos, unidas a la $f'_z + \lambda\phi'_z = 0$, que nos daba el valor de λ, y a la $\phi(x, y, z) = 0$, forman un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas, que permitirá calcular los valores de λ, x, y, z. Tal es el *método de los multiplicadores de Lagrange* que requiere una discusión ulterior para distinguir máximos de mínimos como en el párrafo anterior.

Como se ve, hallar los extremos de la función [1] con la condición [2] equivale a hallar los extremos libres de la función $f + \lambda\phi$, ya que las condiciones para éstos son la anulación de las derivadas parciales:

$$f'_x + \lambda\phi'_x = 0 \qquad f'_y + \lambda\phi'_y = 0 \qquad f'_z + \lambda\phi'_z = 0$$

EJEMPLOS:

1.° Construir el rectángulo de área máxima entre los de perímetro constante $2k$.

Sean x, y las longitudes de los lados; se trata de hallar el máximo de la función $z = xy$ con la condición de que:

$$x + y = k$$

La función $z = xy$ tiene como representación un hiperboloide. Si se plantea el problema de determinar los extremos libres de la función $z = xy$, se obtienen como condiciones:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y = 0; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = x = 0$$

y se ve fácilmente que en el origen hay un punto de silla.

Distinto de éste, es el problema de determinar los extremos de dicha función condicionados por la relación:

$$x + y = k \qquad [1]$$

Ahora no se consideran todos los puntos de la superficie, sino sólo los de intersección de la misma con el plano [1].

En virtud de lo que hemos dicho, tal propiedad equivale a hallar los extremos libres de la función:

$$xy + \lambda(x + y - k)$$

Igualando a cero la diferencial:

$$xdy + ydx + \lambda(dx + dy) = 0$$

ha de ser:

$$x + \lambda = 0$$

$$y + \lambda = 0$$

que con la:

$$x + y = k$$

nos da los valores:

$$x = k/2; \qquad y = k/2$$

es decir, se trata de un cuadrado.

2. CASO GENERAL

Supongamos la función:

$$z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad [1]$$

en el cual las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ no sean independientes, sino que estén ligadas por las relaciones:

$$\begin{aligned} \phi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \\ \phi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \\ &\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots \\ \phi_p(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \end{aligned} \qquad [2]$$

siendo $p < n$ y admitamos que tanto z como $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_p$ tengan derivadas parciales primeras continuas respecto a todas sus variables.

Sea $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ un punto, cuyas coordenadas satisfacen las relaciones [2].

El método de los multiplicadores de Lagrange, se desarrolla del siguiente modo:

a) Se forma la función suma de la dada y el producto de cada una de las relaciones de condición [2] por los parámetros $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$. Es decir,

$$\phi\,(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p) = f + \lambda_1\phi_1 + \ldots + \lambda_p\phi_p \qquad [3]$$

b) Se resuelve el sistema de $(n + p)$ ecuaciones, de las cuales, p de ellas son las de la condición [1], y las n restantes son las derivadas parciales primeras de ϕ, respecto a cada una de las variables, es decir:

$$\phi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$
$$\phi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\phi_p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

$$\phi'_{x_1} = f'_{x_1} + \lambda_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} + \ldots + \lambda_p \frac{\partial \phi_p}{\partial x_1} = 0$$

$$\phi'_{x_2} = f'_{x_2} + \lambda_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} + \lambda_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} + \ldots + \lambda_p \frac{\partial \phi_p}{\partial x_2} = 0 \qquad [4]$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\phi'_{x_n} = f'_{x_n} + \lambda_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial x_n} + \lambda_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial x_n} + \ldots + \lambda_p \frac{\partial \phi_p}{\partial x_n} = 0$$

c) Las soluciones del sistema [4] permiten conocer los parámetros λ_1, λ_2, ..., λ_p y $x_1, x_2, \ldots, x_n$, que serán las coordenadas del punto $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ que satisfacen las condiciones necesarias para que la función ϕ posea un máximo o mínimo.

EJEMPLO:

Hallar las dimensiones de un paralelepípedo de área total constante, para que su volumen sea máximo.

Sean x, y, z, las dimensiones del paralelepípedo dado.

El área total es:

$$S = 2xy + 2xz + 2yz$$

o sea:

$$2xy + 2xz + 2yz - S = 0$$

El volumen:

$$V = xyz$$

a) El problema está en determinar los extremos de la función:

$$\Phi = xyz + \lambda_1(2xy + 2yz + 2xz - S)$$

Aplicando el método de multiplicadores, tendremos:

b)

$$\phi_1 = 2xy + 2xz + 2yz - S = 0$$
$$\Phi'_x = yz + \lambda_1(2y + 2z) = 0$$
$$\Phi'_y = zx + \lambda_1(2x + 2z) = 0$$
$$\Phi'_z = xy + \lambda_1(2x + 2y) = 0$$

que es un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas $x; y, z, \lambda_1$.

Resolviendo el sistema:

$$\lambda_1 = \frac{-yz}{2(y+z)}; \qquad \lambda_1 = \frac{-xz}{2(x+z)}; \qquad \lambda_1 = \frac{-xy}{2(x+y)}$$

Igualando las dos primeras:

$$\frac{-yz}{2(y+z)} = \frac{-xz}{2(x+z)}$$

$$yz + xy = xz + xy \ ; \ x = y$$

Igualando las dos últimas:

$$\frac{-xz}{2(x+z)} = \frac{-xy}{2(x+y)}$$

$$xz + yz = xy + yz \ ; \ y = z$$

De donde $x = y = z$, luego el paralelepipedo es un cubo de arista:

$$x = y = z = \sqrt{\frac{S}{6}}$$

valor obtenido sustituyendo en:

$$\phi_1 = 2xy + 2xz + 2yz - S = 0$$

y y z por sus valores.

EJERCICIOS

1. La sección de un canal tiene forma de trapecio isósceles (fig. 1). ¿Cómo deben tomarse su altura h y el ángulo de inclinación ϕ para que el entorno sea mínimo para un área F dada?

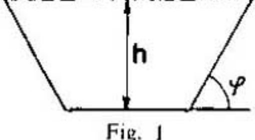


Fig. 1

Solución:

$$\phi = \pi/3; \qquad h = \sqrt{F/\sqrt{3}}$$

2. Determinar el cuadrilátero de área máxima cuyos lados tienen longitudes dadas.

3. Entre todas las pirámides que tienen por base el mismo cuadrado y la misma superficie lateral, determinar la de volumen máximo.

4. Entre todos los paralelepípedos rectos de igual superficie determinar el de volumen máximo.

5. Descomponer con número positivo N en tres partes, tales que la suma de sus cubos sea mínima.

6. Determinar las dimensiones de un paralelepípedo recto rectángulo, salvo una de las caras, de modo que teniendo volumen dado, sea de superficie mínima.



CALCULO NUMERICO

1

Matemática aplicada y cálculo numérico

1. MATEMATICA APLICADA Y MODELOS MATEMATICOS

Al aplicar la Matemática a un problema de la realidad (física, biológica, tecnológica, económica, etc.), empezamos por sustituir la situación, generalmente demasiado compleja, por otra situación simplificada en que se conserven las características fundamentales de la primera, pero prescindiendo de excesivos detalles. Así en Mecánica para estudiar el movimiento de los cuerpos físicos sustituimos éstos por entes matemáticos que llamamos «sólidos rígidos» o por «puntos materiales» que permiten una descripción de los fenómenos suficientemente aproximada al fin que nos proponemos. Esta primera fase podría denominarse de preparación del modelo matemático.

Una segunda fase consiste en obtener relaciones entre los entes matemáticos representativos de la realidad para después, en una tercera fase, traducir los resultados así obtenidos a la situación real.

En las fases primera y última, la aceptación del orden de aproximación del modelo matemático (tanto global como de sus aspectos parciales) a la realidad corresponde al físico, biólogo, etc., en colaboración con el estadístico o con el matemático aplicado.

En la segunda de las fases indicadas, hay una serie de magnitudes que han de introducirse en el modelo a partir de observaciones o medidas de la realidad. Tales medidas llevan implícito un cierto orden de aproximación del 1 %, 0,1 %, etcétera, del cual no se puede pasar por la naturaleza experimental de las medidas.

Aquí el responsable del ajuste del modelo a la realidad y del orden de aproximación de las medidas sigue siendo el físico, economista, etc., en colaboración con el estadístico o matemático aplicado.

2. EL PROBLEMA FISICO DE LA MEDIDA DE MAGNITUDES

Es interesante comprender la diferencia entre el problema matemático y el problema físico de medir la distancia entre dos puntos, que pueden ser, por ejem-

plo, los extremos de la diagonal de un cuadrado tomando el lado como unidad. Se observa, en primer lugar, que en la sucesión de fracciones:

$$r_0, \frac{r_1}{10}, \frac{r_2}{10^2}, \ldots, \frac{r_n}{10^n}, \ldots$$

medidas aproximadas de la diagonal, no se puede llegar más allá de un cierto lugar n, ya que por la imperfección de nuestros sentidos y de los aparatos de medida no se puede apreciar más que múltiplos de una cierta longitud δ. Además, si se repiten las medidas, incluso por el mismo observador, en la nueva serie de fracciones:

$$r'_0, \frac{r'_1}{10}, \ldots, \frac{r'_n}{10^n}, \ldots$$

se verifica que, a partir de un cierto n, es $r'_n \neq r_n$. Vemos, pues, que el problema de la medida, que en la Matemática pura da origen a la noción de número irracional, en la Matemática aplicada es el punto de partida de la teoría de errores, y del cálculo con números aproximados, ya que toda medida física lleva un error por su naturaleza misma. El problema de establecer el valor que debe asignarse a una magnitud como consecuencia de una serie o muestra de medidas de la misma es el *problema estadístico de la estimación* que no tratamos ahora. (Véase S. Rios, *Métodos Estadísticos;* Madrid, 1970, pág. 406.)

3. ANALISIS NUMERICO

Las personas interesadas en aplicar la Matemática no pueden conformarse con conocer los conceptos y las fórmulas que resuelven teóricamente los problemas, sino que necesitan saberlos aplicar a los casos concretos con datos numéricos, y estimar la confianza y aproximación de los resultados finales de sus operaciones.

Los datos numéricos con que operan las ciencias aplicadas (Economía, Estadística, Química, etc.), se obtienen, en general, mediante medidas, observaciones o valoraciones que no pueden dar resultados exactos.

Otras veces intervienen en los cálculos números irracionales, como π, que se pueden utilizar con cuantas cifras decimales se desee; pero para que la realización efectiva de operaciones con ellos tenga lugar, es necesario sustituirlos por una fracción decimal aproximada. Esto mismo ocurre con números racionales, como $\frac{1}{3}$, si se quieren poner en forma decimal.

Introducidos los datos en el modelo matemático, procedemos a hacer transformaciones matemáticas para llegar finalmente a hacer operaciones numéricas con los datos experimentales de las medidas u otros números como π, e, etc., definidos de modo matemático. Viene aquí el *Análisis numérico* en nuestra ayuda, como un conjunto de métodos matemáticos que permiten realizar de la manera

más simple y adecuada estas operaciones y lograr una cierta aproximación en los resultados finales. De esta fase es responsable el analista numérico.

4. TIPOS DE ERRORES

Al estudiar la aproximación en las operaciones con números definidos matemáticamente o números procedentes de medidas, debemos considerar varios tipos de errores: *errores groseros, errores de redondeo, errores propagados y errores engendrados.*

Los *errores groseros* son más bien equivocaciones que pueden cometerse al hacer a mano o máquina una operación, incluso sencilla y no cabe para evitarlos más que seguir normas de repetición de operaciones que permitan detectarlos y eliminarlos.

Los *errores de redondeo* proceden de conservar en las representaciones decimales de los números que intervienen en los cálculos, sean finitas o no, sólo una parte de las cifras que figuran en ellas. Así al tomar como representación de π el número 3,141, prescindimos de infinitas cifras. Tales errores se denominan, a veces, *errores inherentes,* porque son consecuencia de la naturaleza empírica de los datos procedentes de medidas que no permiten pasar de un cierto número de cifras, o bien por la supresión de cifras en un decimal a causa de la necesidad o conveniencia de los medios de cálculo de que se dispone que son de capacidad limitada.

Debemos considerar también *errores propagados y errores engendrados en los cálculos.*

Al someter dos números a una operación, por ejemplo, $\frac{1}{3}\pi$, estos números deben ser puestos en forma decimal finita. Nosotros hacemos en realidad la operación $0{,}333 \cdot 3{,}141$ o más bien esta operación asociada al redondeo del resultado a tres cifras. Designando esta nueva operación por $R(0{,}333 \cdot 3{,}141)$, el error resulta:

$$\frac{1}{3}\pi - R(0{,}333 \cdot 3{,}141) =$$

$$= \left(\frac{1}{3}\pi - 0{,}333 \cdot 3{,}141\right) + (0{,}333 \cdot 3{,}141 - R(0{,}333 \cdot 3{,}141))$$

Es decir, tenemos así el error descompuesto en dos sumandos: el primero se suele llamar el *error propagado* y es el que se mantiene a través de la operación por tener los datos unos errores iniciales; el segundo se suele llamar *error engendrado,* porque es producido por la operación misma, en este caso de redondeo. Entre estos errores engendrados hay que señalar especialmente los *errores de truncación* que son los que resultan de la necesidad de reducir a un *número finito* de operaciones todo proceso matemático infinito. Así, si un número es la suma de una serie infinita no es posible sumar más que un número finito de sumandos, y ésta es la causa del error de truncación que aparece, aunque se puedan calcular exactamente los términos de la serie.

2

Operaciones elementales con números aproximados

1. PROBLEMAS DEL CALCULO CON NUMEROS APROXIMADOS

Las operaciones con números aproximados tienen una gran importancia; por un lado, para conocer la aproximación de los resultados obtenidos, y también para evitar cálculos con números de más cifras que las necesarias en el problema que interesa.

Se presentan dos problemas fundamentales:

1. *Problema directo.*

¿Con qué aproximación se obtendrá el resultado de una operación que debe efectuarse con números aproximados, cuyo grado de aproximación es conocido?

2. *Problema inverso.*

¿Cuál debe ser el grado de aproximación de los datos de una operación para obtener el resultado con una aproximación pedida?

2. CIFRAS SIGNIFICATIVAS

Cada una de las cifras 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, que figuran en un número se llama *significativa*, salvo si sirve sólo para determinar el lugar de la coma que indica el orden decimal.

Por ejemplo, si escribimos:

23,5 *m.*

0,0235 *Km.*

23,05 *m.*

23,50 *m.*

23,5000 *m.*

el primer número tiene 3 cifras significativas; el segundo tiene 3 cifras significativas, ya que los ceros sólo sirven para determinar el lugar de la coma; el tercero y cuarto tiene 4, y el quinto tiene 6.

A veces no se distingue entre 23,5 y 23,50 *m.*; pero en el cálculo numérico aproximado conviene distinguir ambos números, ya que el cero final en 23,50 supone conocer más que si escribimos sólo 23,5, y no sabemos cuál es la cifra que sigue al 5.

Es frecuente la notación por potencias de 10 para evitar la ambigüedad respecto de las cifras significativas. Así, al escribir $42{,}700 \times 10^4$, indicamos que las cifras significativas son las 5 del primer factor.

Redondear un número es conservar sus n primeras cifras de acuerdo con la siguiente regla: 1.°, *si las cifras suprimidas representan menos de media unidad del orden de la última conservada, ésta última no se modifica;* 2.°, *si representan más, se incrementa en* 1 *la última conservada;* 3.°, *si es igual a media unidad se incrementa en* 1 *la última si es impar, y no se incrementa si es par.*

Un número así redondeado se dice con n cifras significativas.

EJEMPLOS:

32,4624	se redondea	en	32,46
32,967	»	»	» 32,97
2,4995	»	»	» 2,50.
2,465	»	»	» 2,46
3,295	»	»	» 3,30

Esta regla, aplicada en un gran número de operaciones, tiende a compensar unos errores con otros, lo cual no ocurre con la regla clásica.

3. ERRORES ABSOLUTO Y RELATIVO

El error absoluto ε de un número aproximado $\overline{a}$ es la diferencia entre el valor verdadero a y el aproximado:

$$\varepsilon = \overline{a} - a$$

Se dice que la aproximación es por defecto o por exceso según que el error absoluto sea negativo o positivo (*).

Un número aproximado se dice que tiene *todas sus cifras correctas* si su error absoluto es menor que media unidad del último orden que en él figura.

(*) Algunos autores cambian estos términos.

Por ejemplo, 3,15 es una aproximación por exceso de $\pi = 3{,}14159, \ldots$, y el error absoluto es $3{,}15 - 3{,}14159 = 0{,}00841 \ldots$

Si un número *exacto* se redondea hasta tener *n* cifras *significativas*, su error absoluto es menor que media unidad del último lugar, luego tiene todas sus cifras correctas el aproximado así obtenido.

Por ejemplo, si redondeamos π con cuatro cifras, tenemos 3,142, cuyo error $3{,}142 - 3{,}14159 \ldots = 0{,}00040 < 0{,}0005$.

Al redondear un número *aproximado* hay que tener en cuenta que en el error del nuevo número influirán el error del anterior y el error de redondeo.

Por ejemplo, sea el número 7,02 con $\varepsilon < 0{,}015$, y redondeemos formando el número 7,0; el error de éste será superior al del anterior más el error de redondeo; es decir: $\varepsilon' = 0{,}015 + 0{,}02 = 0{,}035 < 0{,}05$, luego 7,0 tiene sus cifras correctas.

Estos números superiores a los errores absolutos se llaman *cotas de error*.

Como se vé, el error absoluto está íntimamente relacionado con el número de cifras decimales del número; pero no da una buena idea de la aproximación, ya que un error de 1 *m.* en 1 *Km.* es menos grave que un error de 1 *m.* en 1 *Hm.* Para tener mejor idea del orden de aproximación se introduce el error relativo.

Error relativo es el cociente del error absoluto por el número exacto:

$$e = \frac{\varepsilon}{\alpha}$$

Un número superior al error relativo se llama *cota* del error relativo.

Por ejemplo, el error relativo de una medida de 1 Km., cuyo error absoluto es 1 m. es $e = 0{,}001$, mientras el error relativo de una medida de 1 cm., cuyo error absoluto es 1 mm. es 0,1.

El error relativo está íntimamente relacionado con el número de cifras significativas correctas.

Si un número tiene n cifras significativas correctas y la primera es k, su error relativo es:

$$< \frac{1}{k \cdot 10^{n-1}}$$

Por ejemplo, si el número 0,0732 tiene tres cifras significativas correctas, su error absoluto $\varepsilon < 0{,}00005$, y el error relativo:

$$e < \frac{0{,}00005}{0{,}07} < \frac{1}{7 \cdot 10^2}$$

Análogamente: *si el error relativo de un número es:*

$$< \frac{1}{2 \cdot (k+1) \cdot 10^{n-1}}$$

y la primera cifra significativa es k, *el número tiene* n *cifras significativas correctas.*

Por ejemplo, si el número 2,717 tiene $e < \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 10^3}$, su error absoluto será:

$$\varepsilon < \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 10^3} \cdot 3 = \frac{1}{2 \cdot 10^3}$$

4. SUMA DE NUMEROS APROXIMADOS

Sean los números aproximados $\bar{a}$, $\bar{a}'$, $\bar{a}''$, correspondientes a los exactos a, a', a'', y sean ε, ε', ε'', sus errores, es decir:

$$\varepsilon = \bar{a} - a; \qquad \varepsilon' = \bar{a}' - a'; \qquad \varepsilon'' = \bar{a}'' - a''$$

Deducimos:

$$\varepsilon \pm \varepsilon' \pm \varepsilon'' = (\bar{a} \pm \bar{a}' \pm \bar{a}'') - (a \pm a' \pm a'')$$

Esto nos dice que el error absoluto de una suma algebraica es la suma algebraica de los errores absolutos de los sumandos.

Como $| \varepsilon \pm \varepsilon' \pm \varepsilon'' | \leq | \varepsilon | + | \varepsilon' | + | \varepsilon'' |$, resulta que la cota de error absoluto de una suma es igual o menor que la suma de las cotas de los errores de los sumandos.

Sean los números 3,14; 2,27; 1,61, que suponemos con todas sus cifras correctas.

Como el error absoluto de cada sumando es menor que 0,005, el error de la suma será menor que 0,015. Tenemos:

$$3{,}14 + 2{,}27 + 1{,}61 = 7{,}02$$

Como $0{,}015 > 0{,}005$, la cifra 2 no es correcta, y al suprimirla cometemos un error, a lo sumo, de 0,02, que sumado al 0,015 nos da un error de $0{,}035 < 0{,}05$; luego el número 7,0 tiene sus cifras correctas.

Cuando se suman números aproximados, cuyos errores son muy diferentes, se debe tener en cuenta que, como en la suma influyen, sobre todo los errores grandes, convendrá prescindir de cifras en algunos sumandos, de manera que los errores de todos ellos sean parecidos. Se suele conservar en los sumandos que tienen más decimales, un decimal más que en el que tiene menos.

Supongamos, por ejemplo, que queremos sumar los números:

$$5{,}87 + 3{,}2716 + 2{,}13 + 0{,}34765$$

que tiene en todas sus cifras correctas.

Tomando el número de decimales indicado, obtenemos:

$$5{,}87 + 3{,}272 + 2{,}13 + 0{,}348 = 11{,}620$$

El error absoluto de la suma es $< 0{,}005 + 0{,}0005 + 0{,}0005 + 0{,}005 = 0{,}011 < 0{,}05$, por tanto, el número 11,6 tiene todas sus cifras correctas.

Un caso notable en que se puede tener una cifra significativa correcta más en el resultado que en los datos se representa en el cálculo de la media aritmética.

Sea la siguiente suma, en que:

a	$\overline{a}$	ε
0,22421	0,2242	− 0,00001
0,31469	0,3147	+ 0,00001
0,44516	0,4452	+ 0,00004
0,37563	0,3756	− 0,00003
0,51611	0,5161	− 0,00001
0,36658	0,3666	+ 0,00002
0,25706	0,2571	+ 0,00004
0,53753	0,5375	− 0,00003
0,16801	0,1680	− 0,00001
0,17848	0,1785	+ 0,00002
3,38346	3,3835	+ 0,00004

La primera columna contiene números exactos; la segunda, redondeados, y la tercera, errores absolutos con sus signos. La media de los números redondeados es 0,33835 con $\varepsilon < 0{,}000004 < 0{,}000005$; es decir, tiene cinco cifras significativas correctas, mientras los datos sólo tenían 4.

Esta idea se ha de tener muy en cuenta en el cálculo aproximado con grandes cantidades de datos para obtener acotaciones del error más perfectas que con las reglas corrientes (*).

(*) Ver Von Neumann-Goldstine. Bull. Am. Math. Soc., 1947.

5. PRODUCTOS, COCIENTES Y RAICES DE NUMEROS APROXIMADOS

Si tenemos dos números aproximados:

$$\bar{a} = a + \varepsilon \qquad \bar{a}' = a' + \varepsilon'$$

al multiplicar, resulta:

$$\overline{aa} = aa' + a\varepsilon' + a'\varepsilon + \varepsilon\varepsilon'$$

y pasando aa' al primer miembro y dividiendo por aa', queda:

$$\frac{\overline{aa}' - aa'}{aa'} = \frac{\varepsilon'}{a'} + \frac{\varepsilon}{a} + \frac{\varepsilon}{a} \cdot \frac{\varepsilon'}{a'}$$

es decir, que el error relativo del producto:

$$E = e + e' + ee'$$

Como ee' es de orden superior a e y e', al sustituir los errores por cotas, podemos dar la siguiente regla práctica:

El error relativo de un producto es inferior a la suma de las cotas de error relativo de los factores.

Supongamos que queremos calcular el área de un círculo cuyo radio mide 1,31 m., con todas sus cifras correctas.

Vamos a tomar como valor aproximado de π el número 3,14, que tiene todas sus cifras correctas.

El valor del área $A = 1{,}31^2 \cdot 3{,}14 = 5{,}388554$.

Veamos las cifras correctas de este producto. El error relativo será menor que:

$$\frac{1}{100} + \frac{1}{100} + \frac{1}{300} < 0{,}024$$

luego el error absoluto será menor que $0{,}024 \cdot 6 = 0{,}144 < 0{,}2$, luego sólo puede decirse que el 5 es cifra correcta del producto.

Para el cociente tenemos el error absoluto:

$$\frac{\bar{a}}{\bar{a}'} - \frac{a}{a'} = \frac{a + \varepsilon}{a' + \varepsilon'} - \frac{a}{a'} = \frac{\varepsilon a' - \varepsilon' a}{a'(a' + \varepsilon')}$$

y dividiendo por $\frac{a}{a'}$ para tener el error relativo:

$$E = \frac{\varepsilon a' - \varepsilon' a}{a'(a' + \varepsilon')} : \frac{a}{a'} = \frac{\varepsilon}{a}\,\frac{a'}{a' + \varepsilon'} - \frac{\varepsilon'}{a' + \varepsilon'} = \frac{e - e'}{1 + e'}$$

y pasando a las cotas de error relativo se tiene la siguiente regla práctica.

El error relativo del cociente de dos números aproximados es menor que la suma de las cotas de los errores relativos del dividendo y divisor.

Supongamos, por ejemplo, que queremos calcular el número de grados de arco que mide 0,32 radianes con todas sus cifras correctas. Tenemos:

$$\frac{180 \cdot 0{,}32}{\pi} = \frac{57{,}60}{3{,}14} = 18^{\circ}, 3442$$

El error relativo será menor que la suma de los errores relativos:

$$\frac{1}{300} + \frac{1}{30} = \frac{11}{300}$$

y, por tanto, el error absoluto será menor que:

$$\frac{11}{300} \cdot 19 = \frac{209}{300} < 0{,}69$$

luego sólo puede decirse que son correctas las cifras 18.

Para la raiz cuadrada tenemos:

$$E = \frac{\sqrt{a + \varepsilon} - \sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{a}(\sqrt{a + \varepsilon} + \sqrt{a})} = \frac{e}{\sqrt{1 + e} + 1}$$

y tomando cotas de error relativo resulta: *una cota del error relativo de la raiz cuadrada es 1/2 de la cota de error relativo del radicando.*

6. DETERMINACION DEL ERROR PROPAGADO EN EL CALCULO DE UNA FUNCION

Los métodos elementales indicados son de poca utilidad cuando hay un cierto número de operaciones y sobre todo para el problema inverso.

Para resolver el problema de acotar el error propagado en el cálculo del valor de una función $z = f(x, y)$, vamos a dar una forma precisa a la expresión del incremento de una función.

Para calcular: $\Delta f(a, b) = f(a + h, b + k) - f(a, b)$, podemos expresar las coordenadas de cualquier punto del segmento que une aquellos dos en la forma:

$$x = a + th, \ y = b + tk \ (0 \leq t \leq 1)$$

con lo que queda:

$$f(x, y) = f(a + th, b + tk) = \phi(t)$$

que es una función compuesta de la variable t por intermedio de x, y, para los puntos de dicho segmento.

Aplicando el teorema de Lagrange a $\phi(t)$, tenemos:

$$\Delta f(a, b) = \phi(1) - \phi(0) = (1 - 0)\, \phi'(\theta)$$

$$(0 < \theta < 1)$$

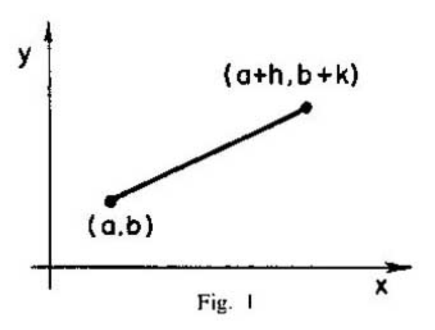


Fig. 1

Como es:

$$\phi'(t) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} h + \frac{\partial f}{\partial y} k$$

resulta:

$$\Delta f(a, b) = h \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{(a + \theta h,\, b + \theta k)} + k \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{(a + \theta h,\, b + \theta k)}$$

Si queremos calcular el valor de una función $f(x, y)$ para los valores $x = a$, $y = b$, frecuentemente se conocerán los valores a', b', aproximados, tales que:

$$| a - a' | \leq \varepsilon_a, \; | b - b' | \leq \varepsilon_b$$

Si en el campo de valores: $a \leq x \leq a'$, $b \leq y \leq b'$, es:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| < A, \; \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| < B$$

la fórmula de los incrementos finitos nos permite escribir:

$$| f(a', b') - f(a, b) | \leq A\varepsilon_a + B\varepsilon_b$$

Esta *fórmula fundamental* nos da una cota del error cometido.

Si son n variables, se tiene la fórmula análoga:

$$| f(a', b', \ldots, l') - f(a, b, \ldots, l) \leqslant A\varepsilon_a + \ldots + L\varepsilon_l$$

Esta fórmula permite abordar los dos problemas fundamentales del cálculo de errores, a saber:

1.º *Problema directo.*—Determinar la cota del error cometido al calcular $f(a, b, c)$ sustituyendo (a, b, c) por valores aproximados a', b', c'.

2.º *Problema inverso.*—Determinar con qué aproximación se han de tomar a, b, c, para que el error cometido al calcular $f(a, b, c)$ sea menor que un número prefijado.

Veamos con algunos ejemplos cómo se procede a resolver el primer problema mediante el ejemplo de la fórmula de los incrementos finitos. Este método general sustituye con ventaja a las reglas clásicas del cálculo con números aproximados.

EJEMPLOS:

1.° Sea calcular el error cometido al obtener:

$$N = \frac{7\sqrt{2} - \pi\sqrt{3}}{\pi^2 + \sqrt{3}}$$

tomando $\pi = 3{,}1$, $\sqrt{2} = 1{,}4$, $\sqrt{3} = 1{,}7$.

Consideremos la función:

$$f(x, y, z) = \frac{7z - xy}{x^2 + y}$$

cuyo valor hemos de obtener para $x = \pi$, $y = \sqrt{3}$, $z = \sqrt{2}$, pero lo hallamos para $x = 3{,}1$, $y = 1{,}7$, $z = 1{,}4$ cometiéndose los errores:

$$\varepsilon_a = |\pi - 3{,}1| < \frac{1}{20}, \quad \varepsilon_b < \frac{1}{20}, \quad \varepsilon_c < \frac{1}{20}$$

Se tiene:

$$f'_x = \frac{y^2 + 14xz - x^2y}{(x^2 + y)^2}, \quad f'_y = \frac{x^3 + 7z}{(x^2 + y)^2}, \quad f'_z = \frac{7}{(x^2 + y)}$$

Si consideramos los intervalos:

$$3 < x < 4, \qquad 1 < y < 2, \qquad 1 < z < 2$$

se tiene:

$$|f'_x| \leq \frac{|y^2| + |14xz| + |x^2y|}{|x^2 + y|^2} \leq \frac{2^2 + 14 \cdot 4 \cdot 2 + 4^2 \cdot 2}{(3^2 + 1)^2} < \frac{148}{100}$$

$$|f'_y| \leq \frac{4^3 + 7 \cdot 2}{100} = \frac{78}{100}; \quad |f'_z| \leq \frac{7}{10}$$

Tenemos, pues, que el error de la función será:

$$|\Delta f(a, b, c)| \leq \frac{148 + 78 + 70}{100} \cdot \frac{1}{20} = \frac{296}{2.000} < \frac{3}{20}$$

Esto es que el valor:

$$f(a, b, c) = \frac{7 \cdot 1{,}4 - 3{,}1 \cdot 1{,}7}{3{,}1^2 + 1{,}7}$$

tiene un error menor que 3/20.

Si queremos calcular en forma decimal este número, introducimos un nuevo error que hay que agregar al anterior.

2.° Como se sabe, el período de un péndulo simple para pequeñas oscilaciones viene dado por la fórmula:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

de aquí resulta el valor de la aceleración de la gravedad.

$$g = \frac{4\pi^2 L}{T^2}$$

Tomando logaritmos resulta:

$$\log g = \log 4\pi^2 + \log L - \log T^2$$

luego:

$$\frac{dg}{g} = \frac{dL}{L} - 2\frac{dT}{T}$$

Sea $L = 1$ m. con un error menor que 1 mm. y $T = 2^s$ con un error menor que 0,01 de segundo.

El error de g será:

$$\frac{dg}{g} = \frac{dL}{L} - 2\frac{dT}{T} < 0{,}001 + \frac{0{,}01}{2} = 0{,}011.$$

EJERCICIOS

1. Teniendo los datos todas sus cifras correctas, efectuar las siguientes operaciones dando el resultado con todas sus cifras correctas:

$$63{,}8402 - 11{,}472; \qquad 3{,}1416 - 2{,}71428 - 1{,}41424$$

2. Dados estos números y sus correspondientes cotas de error absoluto:

$$a = 62{,}54252 \qquad b = 4{,}2285946 \qquad c = 5{,}031472$$
$$|\varepsilon| < 0{,}0003 \qquad |\varepsilon| < 0{,}00002 \qquad |\varepsilon''| < 0{,}00002$$

calcular, con todas sus cifras correctas, los resultados de las siguientes operaciones:

$$a + b + c; \qquad a - b - c; \qquad a + b - c$$
$$c - a - b; \qquad a + b$$

3. Sea un cilindro circular recto de 10 m. de altura y 5 m. de radio. Determinar la variación de su volumen cuando se incrementa su altura en 1 dm. y el radio en 3 cm.

4. Calcular el lado del pentágono inscrito en la circunferencia por la fórmula:

$$L = \frac{1}{4}\left[\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{3}(\sqrt{5}\right] - 1)$$

determinando el error cometido al tomar $\sqrt{3} \simeq 1{,}7$, $\sqrt{5} \simeq 2{,}2$.

Solución:

$$L = 0{,}44 \quad \text{con} \quad \varepsilon < 0{,}07$$

5. En un triángulo rectángulo isósceles cuyos catetos miden 2 m. de longitud se ha acortado uno de ellos 2 cm. y el otro se ha alargado 5 cm. Determinar los ángulos agudos del nuevo triángulo.

6. Para determinar la resistencia R de un circuito se utiliza la fórmula $R = \frac{E}{i}$, en que E es la fuerza electromotriz e i la intensidad. Determinar el error que se comete al calcular R para $E = 110$ v. con $\varepsilon < 0{,}1$ v. e $i = 10$ amp. con $\varepsilon < 0{,}05$ amp.

7. Hallar la superficie de una esfera cuyo volumen es 281,543 m^3, con error menor que 0,001.

8. Calcular con error menor $\frac{1}{10^2}$, los valores de las raíces α y β de la ecuación $x^4 - 2\sqrt{3}x^2 + \sqrt{5} = 0$, así como la suma $\alpha^4 + \beta^4$.

3

Resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Matrices

1. METODO DE REDUCCION DE GAUSS

Entre los métodos de solución de sistemas de ecuaciones lineales, tiene gran interés el método clásico de reducción en la forma sistemática debida a Gauss, extensamente aplicado, tanto en el cálculo a mano como en máquinas eléctricas y ordenadores.

Cuando el sistema no tiene particularidades que indiquen que conviene otro método, seguiremos el siguiente proceso sistemático debido a Gauss.

Aunque el método es general, para simplificar la notación, supondremos un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$a_{11}\ x_1 + a_{12}\ x_2 + a_{13}\ x_3 = a_{14} \qquad [1]$$

$$a_{21}\ x_1 + a_{22}\ x_2 + a_{23}\ x_3 = a_{24} \qquad [2]$$

$$a_{31}\ x_1 + a_{32}\ x_2 + a_{33}\ x_3 = a_{34} \qquad [3]$$

Supongamos que $a_{11} \neq 0$ (si no tomamos como [1] otra ecuación en que el coeficiente de x_1 sea $\neq 0$.

1.° Dividimos la ecuación [1] por a_{11}.

2.° Multiplicamos la ecuación resultante por a_{21} y la restamos de la [2]; análogamente la multiplicaremos por a_{31} y la restamos de la [3].

Obtenemos así las ecuaciones:

$$x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}} x_3 = \frac{a_{14}}{a_{11}} \qquad [4]$$

$$\left(a_{22} - \frac{a_{12}}{a_{11}} a_{21}\right) x_2 + \left(a_{23} - \frac{a_{13}}{a_{11}} a_{21}\right) x_3 = a_{24} - \frac{a_{14}}{a_{11}} a_{21} \qquad [5]$$

$$\left(a_{32} - \frac{a_{12}}{a_{11}} a_{31}\right) x_2 + \left(a_{33} - \frac{a_{13}}{a_{11}} a_{31}\right) x_3 = a_{34} - \frac{a_{14}}{a_{11}} a_{31} \qquad [6]$$

que designaremos brevemente:

$$x_1 + b_{12}\ x_2 + b_{13}\ x_3 = b_{14} \qquad [4]$$

$$b_{22}\ x_2 + b_{23}\ x_3 = b_{24} \qquad [5]$$

$$b_{32}\ x_2 + b_{33}\ x_3 = b_{34} \qquad [6]$$

Operando con [5] y [6] del mismo modo que lo hemos hecho con [1], [2] y [3], obtendremos:

$$x_2 + c_{23}\ x_3 = c_{24} \qquad [7]$$

$$c_{33}\ x_3 = c_{34} \qquad [8]$$

De [8], se obtiene:

$$x_3 = \frac{c_{34}}{c_{33}}$$

y sustituyendo en [7], resulta:

$$x_2 = c_{24} - c_{23}\frac{c_{34}}{c_{33}}$$

se ve que *la idea del método ha sido sustituir el sistema* [1], [2], [3] *por el sistema triangular equivalente* [4], [7], [8].

Los cálculos se disponen en la forma ordenada que indica el siguiente esquema, en el cual los corchetes indican el orden en que se van obteniendo los coeficientes:

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} b_{12}\ [2] & b_{13}\ [2] & b_{14}\ [2] \\ b_{22}\ [3] & c_{23}\ [4] & c_{24}\ [4] \\ b_{32}\ [3] & c_{33}\ [5] & c_{34}\ [6] \end{array}$$

Diversas modificaciones, debidas a Jordan, Crout, etc., se estudian en los tratados.

Ejemplo:

Sea el sistema:

$$9{,}3746x_1 + 3{,}0416x_2 - 2{,}4371x_3 = 9{,}2333 \qquad [1]$$

$$3{,}0416x_1 + 6{,}1832x_2 + 1{,}2163x_3 = 8{,}2049 \qquad [2]$$

$$-2{,}4371x_1 + 1{,}2163x_2 + 8{,}4429x_3 = 3{,}9339 \qquad [3]$$

Una primera reducción nos da el sistema:

$$x_1 - 0{,}32445x_2 - 0{,}25997x_3 = 0{,}98493 \qquad [4]$$

$$5{,}19635x_2 - 2{,}00702x_3 = 5{,}20914 \qquad [5]$$

$$2{,}00702x_2 - 7{,}80933x_3 = 6{,}33427 \qquad [6]$$

Una segunda reducción nos da:

$$x_2 + 0{,}38624x_3 = \quad 1{,}00246 \qquad [7]$$

$$+ \, 7{,}03414x_3 = + \, 4{,}32231 \qquad [8]$$

de donde resulta finalmente:

$$x_1 = 0{,}89643, \qquad x_2 = 0{,}76512, \qquad x_3 = 0{,}61448$$

En este ejemplo puede el lector darse cuenta de la simplificación de cálculos que supone la simetría del sistema.

En el caso de un sistema de n ecuaciones con p incógnitas, se puede seguir el mismo método, teniendo en cuenta que si se llega a una ecuación del tipo $0 \cdot x = k$ el sistema es incompatible.

2. CALCULO NUMERICO DE DETERMINANTES Y ADJUNTOS

El método directo para el cálculo de determinantes es inaplicable en cuanto el orden empieza a tener valores grandes. Así para $n = 10$, resulta:

$$10! > 3 \cdot 10^6,$$

para $n = 14$, es:

$$14! > 8,7 \cdot 10^{10}$$

El método de Gauss de resolución numérica de ecuaciones da un método práctico de cálculo de determinantes.

Teniendo en cuenta las operaciones hechas para pasar del sistema [1], [2], [3], al [4], [5], [6], y llamando A al determinante del primer sistema y A_1 al de las ecuaciones [5], [6] tenemos aplicando las propiedades bien conocidas de los determinantes $A = a_{11} \, A_1$.

Análogamente, tenemos:

$$A_1 = b_{22} \cdot c_{33}$$

luego: $A = a_{11} \cdot b_{22} \cdot c_{33}$.

Para el cálculo de los adjuntos: A_{11}, A_{21}, A_{31} de la primera columna consideremos el sistema:

$$a_{11} \, x_1' + a_{12} \, x_2' + a_{13} \, x_3' = 1$$

$$a_{21} \, x_1' + a_{22} \, x_2' + a_{23} \, x_3' = 0$$

$$a_{31} \, x_1' + a_{32} \, x_2' + a_{33} \, x_3' = 0$$

Se ve inmediatamente que:

$$Ax_1'' = A_{21}; \qquad Ax_2'' = A_{22}; \qquad Ax_3'' = A_{23}$$

Análogamente resolviendo el sistema cuyos segundos miembros son 0, 1, 0, se tiene:

$$Ax_1''' = A_{31}; \qquad Ax_2''' = A_{32}; \qquad Ax_3''' = A_{33}$$

y análogamente:

$$Ax_1''' = A_{31}; \qquad Ax_2''' = A_{32}; \qquad Ax_3'' = A_{33}$$

Vemos así que tanto el cálculo de determinantes como de adjuntos se reduce a la resolución de sistemas de ecuaciones.

Otro método de cálculo rápido de determinantes es el que se ve en los siguientes desarrollos fácilmente comprensibles:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} = \frac{1}{a_1^3} \begin{vmatrix} a_1 & a_1a_2 & a_1a_3 & a_1a_4 \\ b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & a_1b_4 \\ c_1 & a_1c_2 & a_1c_3 & a_1c_4 \\ d_1 & a_1d_2 & a_1d_3 & a_1d_4 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{a_1^3} \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & a_1b_2 - a_2b_1 & a_1b_3 - a_3b_1 & a_1b_4 - a_4b_1 \\ c_1 & a_1c_2 - a_2c_1 & a_1c_3 - a_3c_1 & a_1c_4 - a_4c_1 \\ d_1 & a_1d_2 - a_2d_1 & a_1d_3 - a_3d_1 & a_1d_4 - a_4d_1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{a_1^2} \begin{vmatrix} a_1b_2 - a_2b_1 & a_1b_3 - a_3b_1 & a_1b_4 - a_4b_1 \\ a_1c_2 - a_2c_1 & a_1c_3 - a_3c_1 & a_1c_4 - a_4c_1 \\ a_1d_2 - a_2d_1 & a_1d_3 - a_3d_1 & a_1d_4 - a_4d_1 \end{vmatrix}$$

3. INVERSION DE UNA MATRIZ

Se puede dar una forma muy práctica a la solución del sistema:

$$\begin{aligned} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + a_{13}\,x_3 &= k_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + a_{23}\,x_3 &= k_2 \\ a_{31}\,x_1 + a_{32}\,x_2 + a_{33}\,x_3 &= k_3 \end{aligned} \qquad [1]$$

Si partimos de la solución dada por la regla de Cramer, tenemos las relaciones:

$$\begin{aligned} x_1 A &= A_{11}\ k_1 + A_{21}\ k_2 + A_{31}\ k_3 \\ x_2 A &= A_{12}\ k_1 + A_{22}\ k_2 + A_{32}\ k_3 \\ x_3 A &= A_{13}\ k_1 + A_{23}\ k_2 + A_{33}\ k_3 \end{aligned} \qquad [2]$$

Divididos por A los dos miembros, y poniendo $\frac{A_{ij}}{A} = \bar{A}_{ij}$ *(adjunto reducido)* quedan:

$$\begin{aligned} x_1 &= \bar{A}_{11}\ k_1 + \bar{A}_{21}\ k_2 + \bar{A}_{31}\ k_3 \\ x_2 &= \bar{A}_{12}\ k_1 + \bar{A}_{22}\ k_2 + \bar{A}_{32}\ k_3 \\ x_3 &= \bar{A}_{13}\ k_1 + \bar{A}_{23}\ k_2 + \bar{A}_{33}\ k_3 \end{aligned} \qquad [3]$$

Estas expresiones pueden considerarse como el resultado de la inversión de las ecuaciones dadas y la matriz de los segundos miembros se llama *matriz inversa o recíproca* de la de los coeficientes del sistema [1].

El poner las soluciones en la forma [3] es especialmente interesante si se trata de resolver varios sistemas con los mismos primeros miembros.

La obtención de la matriz inversa de una dada es un problema que tiene un interés en sí y se hace calculando A y los A_{ij} por los métodos indicados de Gauss (p. 2).

EJEMPLO:

Aplicando este método al ejemplo del párrafo 1, se encuentra:

$$\begin{aligned} x_1 &= -\ 0{,}148032k_1 - 0{,}083594k_2 + 0{,}054774k_3 \\ x_2 &= -\ 0{,}083594k_1 + 0{,}213651k_2 - 0{,}054909k_3 \\ x_3 &= \quad 0{,}054773k_1 - 0{,}054909k_2 + 0{,}142164k_3 \end{aligned}$$

4. ERRORES DE REDONDEO Y ERRORES INHERENTES AL SISTEMA

Se puede hacer una comprobación del resultado de la resolución de un sistema de ecuaciones sustituyendo los valores de las incógnitas en las ecuaciones primitivas (*). No hay que olvidar, sin embargo, que las operaciones hechas pueden haber dado lugar a redondeos prescindiendo de cifras y la comprobación no resultar exacta.

(*) Otro método de Milne, consiste en agregar a la matriz de los coeficientes una columna de comprobación (Numerical Calculus, p. 31).

Conviene, siempre que sea posible, retener todas las cifras en los cálculos; pero si el número de ecuaciones es grande se requieren métodos especiales (de Von Neuman y Goldstine) para tratar el problema de los errores de redondeo.

En muchos problemas es importante tener en cuenta que, por ser los coeficientes experimentales, vienen afectados de errores iniciales y se trata de acotar los errores posibles de las incógnitas en los que influye la estructura del sistema (llamados *errores inherentes al sistema).*

Hay sistemas en que pequeños errores en los coeficientes dan lugar a grandes errores en las incógnitas se llaman *mal acondicionadas.* Se presentan siempre que el determinante de los coeficientes tiene un valor muy pequeño, comparado con el de alguna incógnita.

Esto se ve fácilmente si se consideran p, e, los dos sistemas siguientes:

$$\begin{aligned} x + y &= 0 \\ x + 0{,}9999\, y &= 1 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} x + y &= 0 \\ x + 1{,}0001\, y &= 1 \end{aligned}$$

La diferencia de los coeficientes es menor que 0,0002 y las soluciones del primero son:

$$\begin{aligned} x &= 10.000 \\ y &= -10.000 \end{aligned}$$

y las del segundo son:

$$\begin{aligned} x &= -10.000 \\ y &= 10.000 \end{aligned}$$

cuyas diferencias son: 20.000.

Una idea de hasta qué punto es un sistema mal condicionado se tiene dividiendo cada ecuación por la raiz cuadrada de la suma de los cuadrados de los coeficientes a_{ij} de la misma y comparando el determinante del sistema, así normalizado con ± 1; cuanto menor es el determinante, peor acondicionado el sistema. Así en el caso del segundo sistema, tal determinante vale aproximadamente:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1{,}0001}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \times 0{,}0001$$

que es el seno del ángulo que forman las dos rectas.

Vamos a estudiar el modo de acotar los errores que hemos llamado *errores inherentes al sistema.*

Consideremos el sistema:

$$\begin{aligned} a_{11}\ x_1 + a_{12}\ x_2 + a_{13}\ x_3 &= k_1 \\ a_{21}\ x_1 + a_{22}\ x_2 + a_{23}\ x_3 &= k_2 \\ a_{31}\ x_1 + a_{32}\ x_2 + a_{33}\ x_3 &= k_3 \end{aligned} \qquad [1]$$

en que los valores verdaderos de los coeficientes son $a_{ij} + \delta_{ij}$, $k_i + \varepsilon_i$; si designamos los verdaderos valores de las incógnitas por $x_i + \delta_i$, tendremos el sistema:

$$\begin{aligned} (a_{11} + \delta_{11})(x_1 + \delta_1) + (a_{12} + \delta_{12})(x_2 + \delta_2) + (a_{13} + \delta_{13})(x_3 + \delta_3) &= k_1 + \varepsilon_1 \\ (a_{21} + \delta_{21})(x_1 + \delta_1) + (a_{22} + \delta_{22})(x_2 + \delta_2) + (a_{23} + \delta_{23})(x_3 + \delta_3) &= k_2 + \varepsilon_2 \\ (a_{31} + \delta_{31})(x_1 + \delta_1) + (a_{32} + \delta_{32})(x_2 + \delta_2) + (a_{33} + \delta_{33})(x_3 + \delta_3) &= k_3 + \varepsilon_3 \end{aligned} \qquad [2]$$

Haciendo los productos indicados y restando de cada una de estas ecuaciones la correspondiente de [1], y admitiendo que se puedan despreciar los productos de la forma $\delta_{ij}\delta_i$ que se consideran de orden superior, queda:

$$\begin{aligned} a_{11}\ \delta_1 + a_{12}\ \delta_2 + a_{13}\ \delta_3 &= \varepsilon_1 - (\delta_{11}\ x_1 + \delta_{12}\ x_2 + \delta_{13}\ x_3) \\ a_{21}\ \delta_1 + a_{22}\ \delta_2 + a_{23}\ \delta_3 &= \varepsilon_2 - (\delta_{21}\ x_1 + \delta_{22}\ x_2 + \delta_{23}\ x_3) \\ a_{31}\ \delta_1 + a_{32}\ \delta_2 + a_{33}\ \delta_3 &= \varepsilon_3 - (\delta_{31}\ x_1 + \delta_{32}\ x_2 + \delta_{33}\ x_3) \end{aligned} \qquad [3]$$

Resulta así que, si se suponen conocidos los errores de los coeficientes, se pueden obtener los de las incógnitas resolviendo el sistema [3], que tiene la misma matriz de coeficientes que el [1] y en que los segundos miembros son:

$$\eta_i = \varepsilon_i - (\delta_{i_1}\ x_1 + \delta_{i_2}\ x_2 + \delta_{i_3}\ x_3) \qquad [4]$$

En la práctica no son conocidos los errores de los coeficientes, sino únicamente cotas de los mismos. Supongamos:

$$|\varepsilon_i| < \delta,\ |\delta_{ij}| < \delta$$

entonces:

$$|\eta_i| < \Delta = \delta(1 + |x_1| + |x_2| + |x_3|)$$

Utilizando las expresiones [3] del párrafo 3 la solución se puede poner en la forma:

$$\delta_i = \bar{A}_{1i}\eta_1 + \bar{A}_{2i}\eta_2 + \bar{A}_{3i}\eta_3$$

luego:

$$|\delta_i| < (|\bar{A}_{1i}| + |\bar{A}_{2i}| + |\bar{A}_{3i}|)\,\Delta$$

EJEMPLOS:

1. En el caso del ejemplo del párrafo 1 si suponemos que los coeficientes son redondeados de los verdaderos valores, es decir, $\delta < 0{,}5 \cdot 10^{-4}$, tendremos:

$$\Delta = 0{,}5 \cdot 10^{-4} (1 + 0{,}90 + 0{,}77 + 0{,}61) = 1{,}64 \cdot 10^{-4}$$

luego:

$$|\delta_1| < 0{,}29\Delta; \qquad |\delta_2| < 0{,}35\Delta; \qquad |\delta_3| < 0{,}25\Delta$$

y, por tanto:

$$0{,}89637 < x_1 < 0{,}89648, \qquad 0{,}76507 < x_2 < 0{,}76519;$$
$$0{,}61443 < x_3 < 0{,}61452$$

2. En el caso del sistema:

$$x + y = 0$$
$$x + 0{,}999y = 1$$

como es mal acondicionado, la cota que da el procedimiento indicado es falsa. Por ejemplo, suponiendo que los cocientes tienen errores menores que $0{,}5 \cdot 10^{-4}$, resulta:

$$\Delta = 0{,}5 \cdot 10^{-4} (1 + 10.000 + 10.000) = 1$$

$$|\delta_1| \leq 1 \left(\frac{1}{0{,}0001} + \frac{1}{0{,}0001} \right) = 20.000; \qquad \delta_2 \leq 20.000$$

y el lector puede comprobar que tal cota no es válida.

5. METODO DE ITERACION (GAUSS - SEIDEL)

Partimos de un sistema de 3 ecuaciones (a fin de simplificar la notación):

$$\begin{aligned} a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + a_{13}\, x_3 &= b_1 \\ a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + a_{23}\, x_3 &= b_2 \\ a_{31}\, x_1 + a_{32}\, x_2 + a_{33}\, x_3 &= b_3 \end{aligned} \qquad [1]$$

Supondremos que los coeficientes de la diagonal a_{ii} son mayores que los a_{ji} restantes de la correspondiente fila. Despejando tendremos:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{a_{11}} (b_1 - a_{12}\, x_2 - a_{13}\, x_3) \\ x_2 &= \frac{1}{a_{22}} (b_2 - a_{21}\, x_1 - a_{23}\, x_3) \\ x_3 &= \frac{1}{a_{33}} (b_3 - a_{31}\, x_1 - a_{33}\, x_3) \end{aligned} \qquad [2]$$

Tomamos como 1.ª solución aproximada $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_1 = b_1/a_{11}$ (resultado de sustituir aquellos valores en la 1.ª ecuación de (2).

La 2.ª solución es $x_1 = \dfrac{b_1}{a_{11}}$, $x_3 = 0$ y calcular x_2 de la 2.ª de (2). La tercera es tomar los valores x_1, x_2 de la anterior y calcular x_3 de la 3.ª de (2). La cuarta a partir de los valores anteriores de x_2, x_3 calcular x_1 de la 1.ª de (2); etc. En la práctica tras un cierto número de pasos se ve si hay convergencia o no. Una condición suficiente para la convergencia es:

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}| \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

EJEMPLO:

Sea el sistema:

$$\begin{aligned} 10x_1 + x_2 + x_3 &= 12 \\ 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 &= 14 \\ 2x_1 + 10x_2 + x_3 &= 13 \end{aligned}$$

Despejando en cada ecuación la incógnita de coeficiente máximo tenemos:

$$x_1 = \frac{12 - x_2 - x_3}{10}$$

$$x_2 = \frac{13 - 2x_1 - x_3}{10}$$

$$x_3 = \frac{14 - 2x_1 - 2x_2}{10}$$

Las aproximaciones sucesivas son: 1.ª (1, 2; 0; 0), 2.ª (1, 2; 1,06; 0), 3.ª (1, 2; 1,06; 0,948), 4.ª (0,9992, 1,06; 0,948), ..., 8.ª (0,999; 1,001; 0,999), ... Está clara la convergencia en este caso, ya que la solución exacta es (1, 1, 1).

6. METODO DE RELAJACION

En el método de relajación se definen los residuales:

$$\begin{aligned} R_1 &= b_1 - a_{11}\, x_1 - a_{12}\, x_2 - a_{13}\, x_3 \\ R_2 &= b_2 - a_{21}\, x_1 - a_{22}\, x_2 - a_{23}\, x_3 \\ R_3 &= b_3 - a_{31}\, x_1 - a_{32}\, x_2 - a_{33}\, x_3 \end{aligned}$$

Se parte de unos valores de las incógnitas estimados y se calculan los residuales y se van modificando dichos valores, de modo que los residuales se vayan aproximando a cero. Para tener una idea de las modificaciones que hay que hacer se observa que si *solamente* se incrementa x_i en 1, R_j disminuye en a_{ji}.

EJERCICIOS

1. Resolver el sistema:

$$\begin{aligned} 1{,}32x - 1{,}06y + 4{,}58z &= 2{,}11 \\ 4{,}17x - 2{,}13y + 1{,}17z &= -2{,}55 \\ -1{,}03x + 3{,}71y + 0{,}65z &= -1{,}15 \end{aligned}$$

Solución:

$$x = -1{,}168; \qquad y = -0{,}745; \qquad z = 0{,}623$$

2. Resolver el sistema que resulta del precedente, sumando 3, 4 y 5 a los 2.° miembros.
3. Calcular el error inherente al sistema del ejercicio 1 anterior suponiendo $\delta < 0{,}5 \cdot 10^{-2}$.
4. Efectuar la inversión de la matriz de los coeficientes de dicho sistema.
5. Los mismos ejercicios para los sistemas:

a)

$$\begin{aligned} 1{,}414x_1 + 2{,}315x_2 + 3{,}147x_3 &= 8{,}541 \\ 2{,}315x_1 + 4{,}141x_2 + 5{,}132x_3 &= 9{,}523 \\ 3{,}147x_1 + 5{,}132x_2 + 6{,}144x_3 &= 8{,}521 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} 2{,}12x_1 + 3{,}13x_2 + 4{,}15x_3 &= 7{,}82 \\ 9{,}83x_1 + 6{,}25x_2 + 3{,}17x_3 &= 6{,}14 \\ 7{,}25x_1 + 4{,}23x_2 + 2{,}21x_3 &= 4{,}16 \end{aligned}$$

suponiendo en el *a)* que $\delta < 0{,}5 \cdot 10^{-2}$ y en el *b)* que $\delta < 0{,}5 \cdot 10^{-2}$.

6. Aplicar el método de Gauss al sistema:

$$\begin{aligned} x_1 - 0{,}8x_2 + 0{,}6x_3 &= -0{,}6 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 &= 5 \end{aligned}$$

(ver que el sistema es incompatible).

4

Ecuaciones algebraicas

1. RAICES DE UNA ECUACION ALGEBRAICA

Un polinomio de coeficientes reales, igualado a cero es una *ecuación algebraica:*

$$P(z) \equiv a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = 0 \qquad [1]$$

Si es $a_0 \neq 0$, la ecuación se dice de grado n.

Se dice que a es un cero del polinomio $P(z)$ o una *raíz de la ecuación* [1] si es $P(a) \equiv 0$.

Condición necesaria y suficiente para que a sea un cero de $P(z)$ es que $P(z)$ sea divisible por $z - a$.

Sea $Q(z)$ el cociente y k el resto de la división de $P(z)$ por $z - a$. Tendremos:

$$P(z) \equiv Q(z)(z - a) + k$$

Haciendo $z = a$ queda:

$$P(a) \equiv k$$

luego si $P(a) = 0$, $k = 0$, y $P(z)$ es divisible por $z - a$, y recíprocamente.

Son bien conocidas fórmulas para resolver las ecuaciones de primero y segundo grados. Para las ecuaciones de tercero y cuarto grados existen fórmulas algebraicas mediante radicales, análogas a la del segundo grado, pero prácticamente inútiles por su gran complicación. Para las ecuaciones de grado superior al cuarto no es posible construir tales fórmulas, según demostró Abel.

Se demuestra en Algebra superior el siguiente TEOREMA FUNDAMENTAL DE GAUSS:

Toda ecuación algebraica de grado n tiene n raíces reales o imaginarias.

2. RAICES ENTERAS

Obtenida una raíz $z = a_1$, como es:

$$P_n(z) \equiv (z - a_1)P_{n-1}(z)$$

la resolución de la ecuación $P_n(z) = 0$ de grado n queda reducida a la $P_{n-1}(z) = 0$ de grado $n - 1$.

Si es:

$$P_n(z) = (z - a_1)^k P_{n-k}(z)$$

y a_1 no es un cero de $P_{n-k}(z)$, se dice que a_1 es una *raíz múltiple de orden* k de $P_n(z) = 0$.

Derivando [1], se obtiene:

$$P'_n(z) = (z - a_1)^{k-1}[kP_{n-k}(z) + (z - a_1)P'_{n-k}(z)]$$

Para $z = a_1$ el polinømio entre paréntesis da:

$$kP_{n-k}(a_1) \neq 0$$

luego a_1 es un cero de orden $k - 1$ de $P'_n(z)$. Es decir, *una raíz múltiple de orden* k *es raíz de las* $k - 1$ *primeras derivadas de la ecuación.*

3. ECUACIONES REDUCIBLES A OTRAS MAS SENCILLAS

De los cursos elementales son bien conocidas las fórmulas de resolución de las ecuaciones de primero y segundo grados.

Veamos ahora la resolución de otras ecuaciones de grado superior a éstas.

A) Ecuación recíproca de cuarto grado:

$$az^4 + bz^3 + cz^2 + bz + a = 0 \quad [1]$$

Dividiendo por z^2, queda:

$$az^2 + bz + c + b\frac{1}{z} + a\frac{1}{z^2} = 0 \quad [2]$$

o bien:

$$a\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) + b\left(\frac{1}{z}\right) + c = 0 \quad [3]$$

Pongamos:

$$z + \frac{1}{z} = y \qquad [4]$$

con lo que resulta:

$$y^2 = z^2 + 2 + \frac{1}{z^2}$$

y sustituyendo en [3] tendremos:

$$a(y^2 - 2) + by + c = 0$$

que es una ecuación de segundo grado. Resuelta, se obtienen dos valores y_1, y_2. De cada uno de éstos, mediante la ecuación [4], obtenemos otros dos valores para z.

EJEMPLO:

$$z^4 + 2z^3 + z^2 + 2z + 1 = 0$$

Mediante la transformación [4], queda:

$$y^2 - 2 + 2y + 1 = 0$$

B) Ecuación recíproca de quinto grado:

$$az^5 + bz^4 + cz^3 + cz^2 + bz + a = 0$$

Siempre admite la raíz $z = -1$. Dividiendo (por la conocida regla de Ruffini) por $z + 1$, se obtiene una ecuación recíproca de cuarto grado y se está en el caso precedente.

C) El mismo método se aplica a la ecuación recíproca de tercer grado.

D) Ecuación binómica: $z^n = A$.

Sea A real o complejo, la solución es $z = \sqrt[n]{A}$, y estas n raíces complejas se obtienen en la forma que es bien conocida.

4. DESCOMPOSICION FACTORIAL

La descomposición factorial de un polinomio de grado n en n factores lineales es única.

Desde luego, el número de factores lineales de toda descomposición debe ser n. Supongamos que fuera:

$$a_0(z - \alpha_1) \dots (z - \alpha_n) = b_0(z - \beta_1) \dots (z - \beta_n)$$

$$a_0 \neq 0, \ b_0 \neq 0$$

Toda α_i debe figurar entre las β_i, pues si no, haciendo $z = \alpha_i$, quedaría $0 = b_0$ $(\alpha_i - \beta_1) \ldots (\alpha_i - \beta_n)$, lo cual es imposible por ser todos los factores distintos de cero. Suprimiendo sucesivamente los factores $z - \alpha_1$ en ambos miembros $z - \alpha_2$, etc., llegaremos finalmente a la expresión:

$$a_0 = b_0 \qquad \text{c.q.d.}$$

De la descomposición:

$$f(z) \equiv a_0(z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \ldots (z - \alpha_n)$$

resulta que si $f(z)$ se anula para un valor a_{n+1} distinto de éstos, tendríamos:

$$0 = a_0(a_{n-1} - a_1) \ldots (a_{n-1} - a_n)$$

y como los n últimos factores son distintos de cero, debe ser $a_0 = 0$.

Al polinomio de grado $n - 1$:

$$a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \ldots + a_n = 0$$

se le aplica el mismo razonamiento y deduciremos que $a_1 = 0$.

Reiterando el procedimiento, llegamos a la siguiente conclusión:

Si un polinomio $f(x)$ de grado n se anula para más de n valores de la variable, es idénticamente nulo.

5. PROPIEDADES DE LAS RAICES

Efectuando el producto indicado en el primer miembro de la relación:

$$a_0(z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \ldots (z - \alpha_n) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$$

e igualando los coeficientes, resultan las relaciones fundamentales entre las raíces y los coeficientes:

$$-a_1/a_0 = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$$

$$a_2/a_0 = \Sigma\alpha_i\alpha_j = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \ldots + \alpha_{n-1}\alpha_n$$

$$-a_3/a_0 = \Sigma\alpha_i\alpha_j\alpha_k$$

$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

$$(-1)^n(a_n/a_0) = \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n$$

6. RAICES IMAGINARIAS DE LAS ECUACIONES DE COEFICIENTES REALES

Si $a + \beta i$ es raíz de orden p de multiplicidad de la ecuación algebraica de coeficientes reales $f(z) = 0$, el número imaginario conjugado $a - \beta i$ es raíz de orden p de la ecuación.

Si en un polinomio $f(z)$ de coeficientes reales se sustituye z por los números imaginarios conjugados $a \pm \beta i$, se obtienen como valores dos números imaginarios conjugados:

$$f(a + \beta i) = P + Qi \; ; \; f(a - \beta i) = P - Qi$$

Por ser $a + \beta i$ raíz, debe ser:

$$P + Qi = 0 \quad \therefore \quad P = 0, \; Q = 0$$

y, por tanto:

$$f(a - \beta i) = P - Qi = 0$$

Como las derivadas sucesivas de $f(z)$ son polinomios de coeficientes reales, resulta que, como hipótesis se verifica:

$$f'(a + \beta i) = f''(a + \beta i) = \ldots = f^{p-1}(a + \beta i) = 0$$

$$f^{(p}(a + \beta i) \neq 0$$

se deduce que:

$$f'(a - \beta i) = f''(a - \beta i) = \ldots = f^{(p-1}(a - \beta i) = 0$$

$$f^{(p}(a - \beta i) \neq 0$$

Como consecuencia, resulta que *todo polinomio $f(z)$ de coeficientes reales se puede descomponer en un producto de factores de primero o segundo grados de coeficientes reales.*

En efecto, si las raíces reales son $a, b, \ldots, m$ y las imaginarias $a \pm \beta i$, $\gamma \pm \delta i$, $\ldots$, $\lambda \pm \mu i$, la descomposición (agrupando los factores correspondientes a raíces conjugadas) es:

$$f(z) = A_0(z - a)(z - b) \ldots (z - m)[(z - a)^2 + \beta^2] \ldots [(z - \lambda)^2 + \mu^2]$$

EJERCICIOS

1. Resolver las ecuaciones:

$$x^4 + 3x^3 + x^2 + 3x + 1 = 0$$

$$2x^4 + x^3 + 5x^2 + x + 2 = 0$$

$$x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$x^5 + 4x^4 + x^3 + x^2 + 4x + 1 = 0$$

2. Ordenar los polinomios anteriores según potencias de $x - 2$.

3. Expresar que la ecuación:

$$x^3 + px - q = 0$$

tiene una raíz doble.

4. Construir la ecuación cuyas raíces son $2, -2, 1, 0$.

5. Idem. la ecuación de raíces son $i, -i, 1$.

6. Idem. $2 + i, 2 - i, 3, 4$.

7. Determinar la condición para que el producto de dos raíces de la ecuación:

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + c\ x + d = 0$$

sea igual a la suma de las otras dos.

Sol:

$$a^3 - 4ab + 8c = 0$$

8. Determinar a y b para que las raíces de la ecuación:

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

estén en progresión aritmética.

9. Sean $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ las raíces de la ecuación:

$$a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4 = 0$$

sobre un eje OX, se llevan los segmentos $OA = \alpha$, $OB = \beta$, $OC = \gamma$, $OD = \delta$.

Demostrar que la condición para que estos cuatro puntos $ABCD$ formen cuaterna armónica es:

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix} = 0$$

5

Determinación de raíces enteras y fraccionarias

1. PROPIEDADES DE LAS RAICES RACIONALES

Si los coeficientes de la ecuación son *números racionales*, siempre puede obtenerse una ecuación de coeficientes enteros con las mismas raíces, multiplicando por el mínimo común múltiplo de los denominadores.

Una ecuación de coeficientes enteros no puede tener raíces fraccionarias si el coeficiente de x^n *es* 1.

Si la fracción irreducible h/k fuese raiz de la ecuación de coeficientes enteros:

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

esto es, si se verificase:

$$(h/k)^n + a_1 (h/k)^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

es decir,

$$h^n + a_1 h^{n-1} k + \dots + a_n k^n = 0$$

Como todos los sumandos, salvo el primero, son múltiplos de k, debería serlo el primero h^n, lo cual es imposible por haber supuesto que h y k son primos entre sí.

2. RAICES ENTERAS

Como la ecuación:

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

no tiene raíces fraccionarias, las racionales que tenga deben ser enteras. Si la raíz $x = c$ es entera, esto es, si se verifica:

$$c^n + a_1 c^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

como todos los n primeros sumandos son múltiplos de c, debe serlo a_n; es decir, *las raíces enteras de la ecuación se encuentran entre los divisores de* a_n.

Si el coeficiente de x^n no es 1, la propiedad anterior es válida, y permite determinar los números entre los que se encuentran las raíces enteras de la ecuación.

3. RAICES FRACCIONARIAS

Si la ecuación es:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

haciendo $x = z/a_0$ y multiplicando por a_0^{n-1}, queda en la forma:

$$z^n + a_1z^{n-1} + a_2a_0z^{n-2} + \dots + a_na_0^{n-1} \equiv 0$$

que tiene únicamente raíces enteras.

Obtenidas éstas, las de la ecuación dada se deducen dividiéndolas por a_0.

Observación. Si en la identidad:

$$f(x) \equiv (c - x)(d_{n-1} + d_{n-2}x + \dots + d_0x^{n-1})$$

hacemos $x = 1$, resulta:

$$f(1) = \dot{\overline{c - 1}} \qquad [1]$$

y haciendo $x = -1$, sale:

$$f(1) = \dot{\overline{c + 1}} \qquad [2]$$

Esto permite abreviar algunos tanteos.

4. REGLA PARA LA DETERMINACION DE RAICES ENTERAS

1.º Se calculan los divisores positivos y negativos del término constante, prescindiendo de aquellos que están fuera de los límites.

2.º Se prescinde de aquellos números c que no cumplan las condiciones [1] y [2].

3.º Para cada uno de los divisores restantes, se ensaya la división por $c - x$, ordenando el polinomio por potencias ascendentes y terminando la operación tan pronto como se llegue a una división inexacta.

Para justificar esta regla de división, observemos que de la identidad:

$$a_n + a_{n-1}x + a_{n-2}x^2 + \ldots + a_0x^n = (c - x)(d_{n-1} + d_{n-2}x + \ldots + d_0x^{n-1})$$

resultan los coeficientes del cociente dados por las fórmulas:

$$d_{n-1} = \frac{a_n}{c},\ d_{n-2} = \frac{d_{n-1} + a_{n-1}}{c},\ \ldots,\ d_0 = \frac{d_1 + a_1}{c}$$

y estos deben ser *enteros* y el resto $d_0 + a_0$ debe ser nulo.

Regla de la determinación de las raíces fraccionarias de la ecuación:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n = 0$$

Se determinan las raíces enteras de la ecuación:

$$z^n + a_1z^{n-1} + a_2a_0z^{n-2} + \ldots + a_na_0^{n-1} = 0$$

y se dividen por a_0.

EJEMPLOS:

1.° Sea calcular las raíces enteras de la ecuación:

$$x^4 + 3x^3 + 8 = 0$$

Los divisores de 8 son:

$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ -1,\ -2,\ -4,\ -8$$

$$P(1) = 12 \qquad P(-1) = 6$$

Por la condición [1] hay que excluir el 8, -4, -8 y por la condición [2] hay que excluir además el 4. Quedan como posibles raíces enteras: 2, -2, ya que 1 y -1 desde luego no lo son.

Dividiendo por $x + 2$, queda:

1	3	0	0	8	
	-2	-2	4	-8	-2
1	1	-2	4	0	

luego $x = -2$ es una raíz, y tenemos:

$$x^4 + 3x^2 + 8 = (x + 2)(x^3 + x^2 - 2x + 4)$$

Dividiendo por $x - 2$, obtenemos:

1	1	-2	4	
	2	6	8	2
1	3	4	12	

luego la única raíz entera de la ecuación es $x = -2$.

2.° Para determinar las raíces fraccionarias de la ecuación:

$$2x^3 - x^2 - x - 3 = 0$$

basta obtener las raíces enteras de la:

$$z^3 - z^2 - 2z - 12 = 0$$

Por los métodos anteriores se ve que la única raíz entera de ésta es $z = 3$; luego la única racional de la dada es $3/2$.

EJERCICIOS

1. Determinar las raíces enteras y fraccionarias de las ecuaciones:

$$x^5 - 5x^4 - 23x^3 + 295x^2 - 824x + 700 = 0$$
$$6x^3 - 25x^2 + 3x + 4 = 0$$

2. Resolver la ecuación:

$$x^4 + 3x^2 - 3x - 1 = 0$$

3. Ver que la ecuación:

$$x^5 - x^4 - 9x^3 + 10x^2 - 11x + 9 = 0$$

carece de raíces racionales.

4. Determinar las raíces racionales de la ecuación:

$$9x^5 + 15x^4 - 50x^3 - 39x^2 + 63x - 98 = 0$$

Solución: 2, 7/3

5. Comprobar que la ecuación $x^3 - 7x - 6 = 0$ tiene raices racionales y obtenerlas.

6

Acotación y separación de raíces reales de una ecuación algebraica

1. MARCHA PARA LA RESOLUCION DE ECUACIONES ALGEBRAICAS

Puede ser en algunos casos conveniente comenzar calculando raíces enteras y fraccionarias y también obtener una ecuación cuyas raíces sean las mismas que las de la dada, pero todas simples (para esto bastará hállar el m.c.d. de la ecuación dada y su derivada y dividir la ecuación dada por dicho máximo común divisor). La *acotación* de raíces tiene por objeto determinar números o cotas, entre los cuales se encuentran las raíces reales de la ecuación. La *separación* de raíces permite determinar intervalos en cada uno de los cuales no exista más que una raíz. Hecha esta operación tenemos como valores aproximados de cada raíz los extremos del intervalo en que se encuentra. Entonces procede aplicar finalmente los *métodos de aproximación* de raíces.

2. ACOTACION DE LAS RAICES

Se dice que un número positivo L es *cota superior* de las raíces positivas de la ecuación $f(x) = 0$, si L es superior a la mayor raíz de la ecuación. Análogamente se definen la cota inferior l de las raíces positivas y las cotas L', l' de las raíces *negativas*.

Basta dar reglas para determinar la cota L, pues la cota inferior de las raíces positivas de la ecuación $f(x) = 0$, es precisamente cota superior de las raíces positivas de la ecuación $f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$. Análogamente determinando las cotas de las raíces positivas de la ecuación $f(-x) = 0$,se tienen las cotas de las raíces negativas de la ecuación $f(x) = 0$.

Veremos tres métodos:

a) *METODO DE NEWTON.*

Si un número a hace positivo a un polinomio $f(x)$ y a todas sus derivadas, dicho número a es una cota superior de las raíces positivas.

En efecto, como es:

$$f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) +$$

$$+ \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \dots + (x-a)^n \frac{f^n(a)}{n!}$$

resulta que si damos a x un valor x_0 mayor que el número positivo a, todos los sumandos son positivos y no puede ser dicho número x_0 raíz.

EJEMPLOS:

1.° Sea:

$$f(x) = x^5 - x^4 - 9x^3 + 10x^2 - 11x + 9 = 0$$

Se tiene:

$$f'(x) = 5x^4 - 4x^3 - 27x^2 + 20x - 11$$

$$\frac{f''(x)}{2!} = 10x^3 - 6x^2 - 27x - 10$$

$$\frac{f'''(x)}{3!} = 10x^2 - 4x - 9$$

$$\frac{f^{IV}(x)}{4!} = 5x - 1$$

Se ve en seguida que para $x = 4$, todos estos polinomios son positivos, luego 4 es la cota superior buscada.

2.° Sea:

$$f(x) \equiv x^5 + x^4 - x^3 + x - 10.000 = 0$$

Ver que la cota superior es 7.

b) *METODO DE AGRUPACION DE LOS TERMINOS.*

Frecuentemente se puede obtener la cota buscada descomponiendo el polinomio en suma de varios, cuyo primer término (de cada uno) sea positivo y viendo desde qué valor en adelante se hacen positivos estos polinomios parciales.

EJEMPLOS:

1.° En la ecuación:

$$f(x) \equiv x^5 - x^4 - 9x^3 + 10x^2 - 11x + 9 = 0$$

podemos poner:

$$f(x) = x^3(x^2 - x - 9) + 10x\left(x - \frac{11}{10}\right) + 9 = 0$$

y se ve así que para $x \geq 4$, los dos polinomios son positivos.

2.° En la ecuación:

$$f(x) \equiv x^5 + x^4 - x^3 + x - 10.000 = 0$$

podemos poner:

$$(x^5 + x - 10.000) + (x^4 - x^3) = 0$$

Se ve que el primer polinomio es positivo si $x > 7$ y el 2.°, si $x > 1$; luego 7 es la cota.

c) *METODO DE ACOTACION DE LAGUERRE.*

Si los coeficientes del cociente y el resto de la división de $f(x)$ por $x - a$ son positivos, es a una cota superior de las raíces positivas de $f(x) = 0$.

Teniendo en cuenta que:

$$f(x) = f(a) + (x - a)(c_0x^{n-1} + c_1x^{n-2} + \dots + c_{n-1})$$

si se dan a x los valores mayores que a, es $f(x) > 0$, luego no hay raíces mayores que a.

Este es, a veces, de aplicación más rápida que el de Newton.

Aplíquese como ejercicio a los dos ejemplos anteriores.

3. SEPARACION DE RAICES REALES

Hecha la acotación de las raíces reales de una ecuación conviene proceder a la *separación* de las mismas, es decir, la determinación de intervalos en cada uno de los cuales exista una sola solución de la ecuación. Logrado ésto, tenemos una resolución aproximada de la ecuación sin más que tomar como valor aproximado de cada raíz uno de los extremos del intervalo que la contiene, según indicamos anteriormente. Vamos, pues, a dar algunos teoremas útiles a este fin que dan soluciones parciales de la cuestión, y que culminan en el teorema de Sturm que da la resolución completa de la misma.

Un teorema que puede ser útil para la separación de raíces es el siguiente:

TEOREMA DE BOLZANO. *Si $f(x)$ tiene signos opuestos en los extremos del intervalo $[a, b]$ tiene en este intervalo un número impar de raíces. Si tiene el mismo signo en ambos extremos, hay en el intervalo un número par de raíces (en particular ninguna).* (Se cuenta una raíz de orden h, como h raíces simples.)

Si son $x_1, x_2, \ldots, x_k$ todas las raíces contenidas en el intervalo $[a, b]$, podemos poner:

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_k)\, \phi(x)$$

en que $\phi(x)$ no se anula en el intervalo.

$$f(a) = (a - x_1)(a - x_2) \ldots (a - x_k)\, \phi(a)$$

$$f(b) = (b - x_1)(b - x_2) \ldots (b - x_k)\, \phi(b)$$

en que $\phi(a)$ y $\phi(b)$ tienen igual signo porque $\phi(x)$ no se anula en ningún punto interior: $f(b)$ tiene el mismo signo que $\phi(b)$ porque todas las diferencias $b - x_i$ son positivas. Como las diferencias $a - x_i$ son negativas, $f(a)$ tiene el mismo signo que $\phi(a)$ si k es par y signo contrario si k es impar. Como $\phi(a)$ tiene el mismo signo que $\phi(b)$ y que $f(b)$, tenemos probado el teorema.

También se utiliza el siguiente:

TEOREMA DE ROLLE. *Entre dos raíces reales consecutivas de una ecuación $f(x) = 0$ de coeficientes reales existe un número impar de raíces de su derivada.*

Prescindiendo de la demostración de este teorema enunciemos el:

COROLARIO. *Entre dos raíces consecutivas de $f'(x) = 0$, hay a lo sumo una raíz de $f(x) = 0$.*

Pues si hubiera dos tendría $f'(x)$ otra entre ellas y aquellas no serían consecutivas.

El teorema de Rolle permitirá frecuentemente separar las raíces de la ecuación $f(x) = 0$. Si las raíces de $f'(x) = 0$ son $\xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_h$, sustituidas dos consecutivas en $f(x)$, si se obtienen valores $f(\xi_i)$, $f(\xi_{i+1})$ de signos opuestos hay entre ellas *una sola* raíz de $f(x)$: si son del mismo signo no hay ninguna. Puede haber también alguna raíz superior a ξ_h o inferior a ξ_1, lo cual se ve mediante el teorema de Bolzano.

El método será aplicable cuando sean fácilmente determinables las raíces de $f'(x) = 0$, por ejemplo, si ésta es de segundo grado, bicuadrada, etc.

EJEMPLOS:

La ecuación $f(x) = x^5 - 3x^3 + 2x^2 - 5 = 0$ tiene como derivada $f'(x) = 5x^4 - 9x^2 + 4x = 0$, cuyas raíces son $-1,5$; 0; $0,5$; 1.

Se puede determinar las cotas ± 2 de las raíces de $f(x)$.

Sustituyendo en $f(x)$.

$x = -2$	$-1,5$	0	$0,5$	1	2
$f(x) = -5$	$+2$	-5	$-4,8$	-5	11

Se deduce en seguida de la marcha de la función que tiene dos raíces negativas en los intervalos $(-2, -1,5)$, $(-1,5, 0)$ y una positiva en $(1, 2)$, y otras dos imaginarias conjugadas.

4. TEOREMA DE BUDAN-FOURIER

Dados dos números reales A, B, se dice que el par (A, B) presenta una *variación* si el signo de A es distinto del de B y presentan *permanencia* si los signos coinciden. Dada una sucesión finita de números reales $A, B, C, \ldots, L$, designaremos por $V[A, B, C, \ldots, H, L]$ al número de variaciones de los pares (A, B), (B, C), $\ldots$, (H, L).

EJEMPLOS:

a) $V[2, -1] = 1$,
$V[3, 2, -1] = V[3, 2] + V[2, -1] = 0 + 1 = 1$.

b) Los coeficientes del polinomio $5x^7 - 8x^5 + 3x^3 - 16x^2 - 7$ presenta tres variaciones.

Si $f(x) = 0$ es una ecuación de coeficientes reales de grado n y a, b son dos números reales $(a < b)$ para los cuales no se anula $f(x)$ ni ninguna de sus derivadas, el número de variaciones de la sucesión:

$$f(a),\ f'(a),\ \ldots,\ f^{n}(a) \qquad [1]$$

no es menor que el de la sucesión:

$$f(b),\ f'(b),\ \ldots,\ f^{n}(b)$$

y la diferencia de ambos números es igual al número de raíces de la ecuación contenidas en el intervalo (a, b) (contando cada una tantas veces como indica su orden) o lo supera en un número par.

Prescindiendo de la demostración (*) veamos su aplicación en:

EJEMPLOS:

$$f(x) = x^5 - 3x^3 + 2x^2 - 5 = 0$$
$$f'(x) = 5x^4 - 9x^3 + 4x$$
$$f''(x) = 20x^3 - 18x + 4$$
$$f'''(x) = 60x^2 - 18$$
$$f^{IV}(x) = 120x$$
$$f^{V}(x) = 120$$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$f'''(x)$	$f^{IV}(x)$	$f^{V}(x)$
− 2	−	+	−	+	−	+
− 1	−	−	+	+	−	+
0	−	0	+	−	0	+
1	−	0	+	+	+	+
2	+	+	+	+	+	+

Entre − 2 y − 1 se pierden dos variaciones y otras dos entre 0 y 1. Al considerar este ejemplo con el teorema de Rolle vimos que había dos raíces en el intervalo (− 2, − 1) y ninguno en el (0, 1). Al pasar de $x = 1$ a $x = 2$ pierde una variación y hay una raíz en dicho intervalo.

5. TEOREMA DE STURM

Sturm ha resuelto de manera exacta la cuestión de la determinación del número de raíces de una ecuación en un intervalo. Sea una ecuación:

$$f(x) \equiv a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a^{n-1}x + a_n = 0 \qquad [1]$$

que podemos suponer carece de raíces múltiples (*) y designaremos su derivada en la forma:

$$f_1(x) = na_0x^{n-1} + (n-1)\,a_1x^{n-2} + \dots + a_{n-1}$$

(*) Puede verse en Navarro-S. Ríos.—*Curso Preliminar de Análisis Matemático.*

(*) En este caso contrario se forma una ecuación sin raíces múltiples como ya se indicó.

Apliquemos a los polinomios $f(x)$, $f_1(x)$ el algoritmo de Euclides, cambiando el signo de cada resto al pasarlo a divisor.

$$\begin{aligned} f(x) &= f_1(x) \cdot P_1(x) - f_2(x) \\ f_1(x) &= f_2(x) \cdot P_2(x) - f_3(x) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_{m-3}(x) &= f_{m-2}(x)\, P_{m-2}(x) - f_{m-1}(x) \\ f_{m-2}(x) &= f_{m-1}(x)\, P_{m-1}(x) - f_m(x) \end{aligned} \qquad [2]$$

Los polinomios $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_m(x)$ forman la llamada *sucesión de Sturm* de la ecuación [1].

Los grados de los polinomios $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_m(x)$ son decrecientes y, por tanto, $m \leq n$, y el último $f_m(x)$ se reduce a una constante distinta de cero porque si no habría raíces comunes a $f(x)$ y $f_1(x)$, lo que es absurdo, porque hemos supuesto la ecuación sin raíces múltiples.

Dos propiedades interesantes de la sucesión de Sturm son:

a) *Para ningún valor de* x *se anulan dos funciones consecutivas.* En efecto, si para un cierto valor se anulasen f_r y f_{r+1}, en virtud de las relaciones [2] se anularía $f_{r+1}, f_{r+2}, \ldots, f_m$, lo cual es absurdo por ser f_m una constante.

b) *Si para un valor de* x *se anula* f_{r+1}, *las* f_r, f_{r+2} *tienen para dicho valor signos contrarios.* Pues por ser:

$$f_r = f_{r+1}\, P_{r+1} - f_{r+2}$$

resulta que si para un valor de x es $f_{r+1} = 0$ debe ser $f_r = -f_{r+2}$.

Enunciemos ahora el teorema de Sturm:

Si $f(x) = 0$ *es una ecuación de coeficientes reales sin raíces múltiples, el número de raíces de la ecuación contenidas en el intervalo* (a, b) *es la diferencia entre el número de variaciones de la sucesión.*

$$f(a),\ f_1(a),\ f_2(a),\ \ldots,\ f_m(a)$$

y el de la sucesión:

$$f(b),\ f_1(b),\ f_2(b),\ \ldots,\ f_m(b)$$

Prescindiendo de la demostración (*), es interesante observar que en la aplicación del teorema se pueden simplificar las operaciones de obtención de la sucesión de Sturm suprimiendo o introduciendo cualquier factor positivo. Si solamente interesa el número total de raíces de la ecuación basta sustituir en la sucesión de Sturm los valores ∞ y $-\infty$.

(*) Puede verse en Navarro-S. Ríos.—*Curso Preliminar de Análisis Matemático.*

EJEMPLOS:

1.º Aplicar el método de Sturm a la ecuación:

$$x^3 - x^2 - 10x + 1 = 0$$

Se tiene:

$$f_1(x) = 3x^2 - 2x - 10$$

$$f_2(x) = 62x + 1$$

$$f_3(x) = 38313$$

Los valores de la sucesión de Sturm son:

x	$f(x)$	$f_1(x)$	$f_9(x)$	$f_3(x)$
∞	+	+	+	+
4	+	+	+	+
3	−	+	+	+
2	−	−	+	+
1	−	−	+	+
0	+	−	+	+
− 2	+	+	−	+
− 3	−	+	−	+
$-\infty$	−	+	−	+

De la inspección del cuadro resulta que las tres raíces son reales y están en los intervalos (3, 4), (0, 1), (− 2, − 3).

2.º Aplicar el método de Sturm a la ecuación:

$$x^5 - 5x^4 + 9x^3 - 9x^2 + 5x - 1 = 0$$

Se tiene:

$$f_1 = 5x^4 - 20x^3 + 27x^2 - 18x + 5$$

$$f_2 = x^3 - x$$

$$f_3 = -32x^2 + 38x - 5$$

$$f_4 = -26x + 19$$

$$f_6 = -192$$

Si $x = \infty$, la sucesión de Sturm presenta una variación, si $x = -\infty$, da 4; luego hay tres raíces y dos imaginarias.

El problema de la separación de raíces complejas requiere recursos de la teoría de funciones analíticas, por lo cual no lo tratamos aquí (*).

(*) Puede verse en Navarro-S. Ríos.—*Curso Preliminar de Análisis Matemático.*

7

Cálculo aproximado de raíces de ecuaciones algebraicas y transcendentes

1. INTRODUCCION

No es necesario seguir paso a paso la marcha vista hasta aquí para llegar a la separación de raíces. En definitiva, la separación de raíces no es más que obtención de valores aproximados de las raíces, para luego mejorarlos. Podemos, pues, seguir otros métodos más rápidos para tener una primera aproximación.

2. METODOS GRAFICOS DE RESOLUCION DE ECUACIONES ALGEBRAICAS O TRANSCENDENTES

PRIMER METODO.—El medio más natural para resolver la ecuación $f(x) = 0$, es hacer la representación gráfica de la función $y = f(x)$ y ver en qué puntos la curva obtenida corta al eje x. Las abscisas de dichos puntos son las raíces de la ecuación $f(x) = 0$. Convendrá, pues, hacer una construcción cuidadosa de la curva en las proximidades de los puntos en que corta al eje x.

Frecuentemente, el teorema de Bolzano [si $f(x)$ es continua en (a, b) y toma signos opuestos en a y b, $f(x) = 0$ tiene, al menos, una raíz en el intervalo] permite calcular aproximadamente una raíz.

EJEMPLO:

Calcular la raíz de la ecuación $x \log x - 2 = 0$.
Tabulemos la función $f(x) = x \log x - 2$.

x	1	2	3	4
$f(x)$	− 2	− 1,4	1,03	2,01

Se ve por el teorema del Bolzano que hay una raíz entre 2 y 3.

SEGUNDO METODO.—Si pasamos algunos términos al segundo miembro, la ecuación a resolver tomará la forma:

$$\phi(x) = \psi(x)$$

Como esto será posible, en general, de varias maneras convendrá hacer la trasposición, de modo que las curvas:

$$y = \phi(x) \qquad y = \psi(x)$$

sean lo más sencillas posible. Construidas estas curvas, las abscisas de sus puntos de intersección nos dan las raíces pedidas.

EJEMPLO:

Sean la ecuación $\cos x - 2x + 1 = 0$. Representamos la curva $y = \cos x$ y la recta $y = 2x - 1$ y la abscisa del punto de intersección nos da aproximadamente la raíz.

Cuando se ha obtenido por métodos gráficos u otros, un intervalo entre cuyos extremos se encuentra una raíz, los métodos de aproximación tienen por objeto obtener dicha raíz con un error menor que ε.

3. LA REGLA DE FALSA POSICION

Los métodos de aproximación de raíces que siguen, valen igualmente para ecuaciones algebraicas o transcendentes.

Sea la ecuación $f(x) = 0$, cuyo primer miembro toma en los puntos a, b, signos opuestos y entre los cuales se halla una raíz de la ecuación.

La ecuación de la cuerda que une los puntos de la curva $y = f(x)$ de abscisas a y b es:

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

La regla de falsa posición consiste en tomar como valor aproximado de la la raíz de la ecuación contenida entre a y b, la abscisa del punto de intersección de la cuerda con el eje X, es decir:

$$x = a + \frac{(b - a)f(a)}{f(a) - f(b)}$$

Este valor es más aproximado que uno, al menos, de los a.

Partiendo de éste y de uno de los anteriores se vuelve a aplicar la regla, etc.

Ejemplo:

La ecuación:

$$f(x) \equiv x^3 + x - 5 = 0$$

tiene una raíz en el intervalo (1, 2), ya que $f(1) = -3$, $f(2) = 5$.

La regla de falsa posición nos da el valor:

$$x = 1 + \frac{-3}{-3-5} = 1 + \frac{3}{8} = 1{,}4$$

que podemos mejorar por reiterada aplicación de la regla. Determine el lector el error de estas aproximaciones.

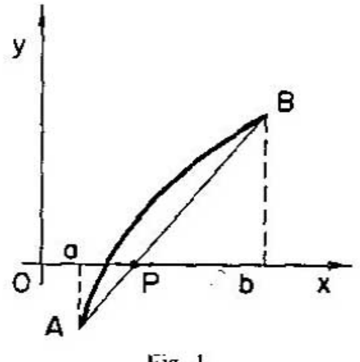
2.° Dada la ecuación $f(x) \equiv (5-x)e^x - 5 = 0$, encontrar la solución comprendida entre $x_0 = 4{,}5$ y $x_1 = 5{,}0$.

A estos valores corresponden $y_0 = 40{,}00$, $y_1 = -5{,}00$, y, por tanto:

$$x \simeq 4{,}50 + \frac{0{,}5 \times 40{,}00}{45{,}00} = 4{,}94$$

Aplicando nuevamente la regla se encuentra:

$$x \simeq 4{,}94 + \frac{0{,}06 \times 3{,}382}{8{,}382} \simeq 4{,}964$$



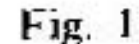


Fig. 1

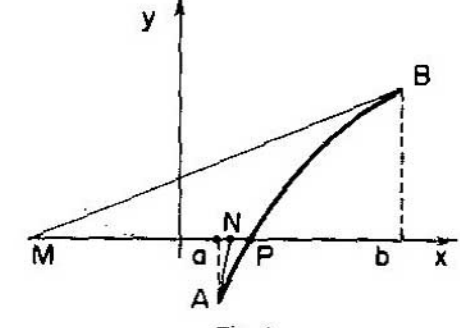


Fig. 2

4. METODO DE NEWTON-RAPHSON

Lo mismo que el anterior, se aplica a ecuaciones transcendentes, y se funda en sustituir la curva por la tangente en uno de los extremos del arco.

La ecuación de la tangente en el punto de abscisa a es:

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

Su intersección con el eje X tiene como abscisa:

$$x = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$$

suponiendo $f'(a) \neq 0$.

Como se ve en la figura, el método de Newton no siempre mejora la aproximación dada por los valores a, b. (Basta ver que la tangente en B corta en un punto M fuera del intervalo $[a, b]$.

Una condición (cuya demostración omitimos) que es suficiente para que la regla de Newton mejore la aproximación obtenida, es que $f''(x)$ tenga signo constante en todo el intervalo.

Para acotar el error cometido con este procedimiento observemos que si hacemos el cambio de variable $x = x' + a''$, la ecuación puede escribirse, aplicando la fórmula de Taylor:

$$f(x) = f(a) + x'f'(a) + x'^2 \frac{f''(\xi)}{2!} = 0$$

en que la nueva incógnita x' es el incremento que hay que dar a a para tener la raíz $x_1 = a + x'$

Si tomamos los dos primeros términos tenemos:

$$x' = -\frac{f(a)}{f'(a)}$$

que es el valor que hemos utilizado en la regla de Newton.

El error es, pues, menor que:

$$x'^2 \frac{f''(\xi)}{2f'(a)}$$

si suponemos que $|f''(\xi)| < M$ en todo intervalo, este error será menor que:

$$\frac{(b - a)^2 M}{2 \cdot |f'(a)|}$$

EJEMPLO:

Consideremos la ecuación trascendente:

$$x - \operatorname{sen} x = 2$$

El ángulo x debe estar comprendido entre 2 y 3 (radianes).

Si tomamos $a = 2{,}5$, se tiene:

$$f(a) = 0{,}5 - \operatorname{sen} 2{,}5 = 0{,}5 - \operatorname{sen} 143^\circ\, 14' = -\, 0{,}097$$
$$f'(a) = 1 - \cos 2{,}5 = 1{,}801$$

luego la aproximación será:

$$2{,}5 - \frac{0{,}097}{1{,}801} = 2{,}3339$$

Calcule el lector el error y reitere la aplicación de la regla.

En el caso en que $f'(a) = 0$ no es aplicable el método. En tal caso se busca primero la raíz de $f'(x) = 0$. Supongamos que sea $f'(a) = 0$. Se desarrolla por la fórmula de Taylor y resulta:

$$f(x) \equiv f(a) + \frac{x'^2}{2} f''(a) + \frac{x'^3}{3!} f'''(\xi) = 0$$

luego el nuevo valor de x será:

$$a_1 = a \pm \sqrt{-\, 2f(a)/f''(a)}$$

5. OTROS METODOS DE APROXIMACION

Se observa que los dos métodos anteriores son caso particular del siguiente: determinar una sucesión x_n tal que:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{m}$$

en que m es la pendiente de una cierta recta.

Así en el método de Newton $m = f'(x_n)$ y en la regula falsi:

$$m = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

Otras posibilidades son tomar:

1.° $$m = \frac{f(a_n) - f(x_i)}{x_n - x_i}$$

2.° $$m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

3.° $$m = f'(x_i)$$

4.° $$m = f'(x_1)$$

5.° $$m = \frac{1}{2}\left[f'(x_n) + \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}\right]$$

La forma de la curva en la proximidad de la raíz puede dar una idea de cuál será el mejor método a elegir. Estos métodos se aplican a ecuaciones con coeficientes complejos.

6. METODO DE ITERACION

Si escribimos la ecuación:

$$f(x) = 0 \qquad [1]$$

en la forma:

$$x = \phi(x) \qquad [2]$$

podemos sustituir en [1] un valor aproximado x_0 de una raíz y obtener sucesivamente:

$$x_1 = \phi(x_0), \qquad x_2 = \phi(x_1), \qquad x_3 = \phi(x_2), \ldots$$

Si se supone $\phi(x)$ *continua en un entorno de la raíz, es decir, del valor* A *tal que* $A = \phi(A)$ *y tal que en dicho entorno* $|\phi(x) - \phi(A)| < k\,|x - A|$, *para* $k < 1$, *se verifica que* $x_i \to A$.

En efecto:

$$x_i - A = \phi(x_{i-1}) - A$$

luego $|x_i - A| = |\phi(x_{i-1}) - A| < k\,|x_{i-1} - A|$ en dicho entorno. Análogamente:

$$|x_{i-1} - A| < k\,|x_{i-2} - A|$$

luego:

$$|x_i - A| < k^i\,|x_0 - A|$$

como $k < 1$, $k^i \to 0$ y $x_i \to A$ cuando $i \to \infty$.

Los métodos antes vistos son casos particulares de este *método de iteración*. Por ejemplo, el método de Newton corresponde a tomar como ecuación [2]:

$$x = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

EJEMPLO:

Determinar una raíz de la ecuación:

$$(5 - x)e^x - 5 = 0$$

partiendo del valor $x_0 = 4{,}9$.

Se tiene $e^x = 134{,}3$; $x_1 = \dfrac{5 \times 133{,}3}{134{,}3} = 4{,}963$; $x_2 = \dfrac{5 \times 142{,}1}{143{,}1} = 4{,}965$. Como se ve, la convergencia es rápida y el método sirve.

EJERCICIOS

1. Calcular una raíz de la ecuación:

$$x^3 - 2x - 5 = 0$$

Solución:

$$x \simeq 2{,}09$$

2. Idem. la raíz que está entre 4 y 5 de la ecuación:

$$x^3 - 9x^2 + 23x - 14 = 0$$

3. Determinar la raíz positiva de la ecuación:

$$x^3 + 3x^2 - 12x - 10 = 0$$

4. Calcular hasta las centésimas la raiz de la ecuación:

$$x^3 - 2x - 5 = 0$$

que está comprendida entre 2 y 2,1.

5. Determinar la raíz menor de la ecuación:

$$x \operatorname{tg} x = 1{,}28$$

6. Determinar las raíces de la ecuación:

$$3x^3 + 5x - 40 = 0$$

8

Eliminación de una incógnita entre dos ecuaciones. Resultante

1. RESULTANTE

Eliminar una incógnita entre varias ecuaciones es deducir una ecuación que se satisface para todas las soluciones de aquellas y carece de dicha incógnita. Cuando es posible eliminar todas las incógnitas en un sistema de ecuaciones se obtiene una relación que han de verificar los coeficientes para que el sistema sea compatible.

Si tal relación es, además de necesaria, suficiente para que el sistema tenga solución, se llama *resultante* del sistema.

2. DISCRIMINANTE

Si las raices de la ecuación:

$$f(x) \equiv a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

son $x_1, x_2, \ldots, x_n$, se llama *discriminante* de la ecuación al cuadrado del determinante de Vandermonde:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \ldots & x_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-2} & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}^2 = \begin{matrix} (x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2 \ldots (x_1 - x_n)^2 \\ (x_2 - x_3)^2 \ldots (x_2 - x_n)^2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (x_{n-1} - x_n)^2 \end{matrix}$$

multiplicado por $a_0^{n(n-1)}$. Se suele designar por Δ y es:

$$\Delta = a_0^{n(n-1)}\Pi(x_i - x_j)^2$$

Se ve que la anulación del discriminante es condición necesaria y suficiente para que la ecuación tenga una raíz múltiple.

3. METODO DE ELIMINACION DE EULER

Si las ecuaciones:

$$f(x) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

$$\phi(x) \equiv b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m = 0$$

tienen una raíz a común, se puede escribir:

$$f(x) \equiv (x - a)\ f_1(x) \equiv (x - a)(A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \dots + A_n)$$

$$\phi(x) \equiv (x - a)\ \phi_1(x) \equiv (x - a)(B_1 x^{m-1} + B_2 x^{m-2} + \dots + B_m)$$

siendo los coeficientes A_i, B_i indeterminados. Es inmediato formar la ecuación idéntica de grado $m + n - 1$:

$$f(x) \cdot \phi_1(x) \equiv \phi(x) \cdot f_1(x)$$

La cual permite obtener, igualando los coeficientes de las mismas potencias de x, $m + n$, ecuaciones homogéneas. Eliminando en ellas los coeficientes indeterminados obtenemos la resultante.

Ejemplo:

Supongamos el sistema:

$$a_0x^2 + a_1x + a_2 = 0$$

$$b_0x^2 + b_1x + b_2 = 0$$

La identidad es:

$$(B_1x + B_2)(a_0x^2 + a_1x + a_2) \equiv (A_1x + A_2)(b_0x^2 + b_1x + b_2)$$

e igualando coeficientes tenemos el sistema:

$$\begin{aligned}
B_1a_0 \qquad\quad - A_1b_0 \qquad\quad &= 0\\
B_1a_1 + B_2a_0 - A_1b_1 - A_2b_0 &= 0\\
B_1a_2 + B_2a_1 - A_1b_2 - A_2b_1 &= 0\\
B_2a_2 \qquad\quad - A_2b_2 &= 0
\end{aligned}$$

del cual se obtiene eliminando A_1, B_1, A_2, B_2, la resultante:

$$\begin{vmatrix} a_0 & 0 & b_0 & 0 \\ a_1 & a_0 & b_1 & b_0 \\ a_2 & a_1 & b_2 & b_1 \\ 0 & a_2 & 0 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

En el caso general se obtiene análogamente la resultante.

4. SISTEMA DE DOS ECUACIONES CON DOS INCOGNITAS

Sea un sistema de dos ecuaciones algebraicas de grados n y m con dos incógnitas:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 0 \\ g(x, y) &= 0 \end{aligned} \qquad [1]$$

Ordenando según las potencias decrecientes de x, tendremos:

$$\begin{aligned} f(x, y) &\equiv a_0(y)\, x^m + a_1(y)\, x^{m-1} + \dots + a_{m-1}(y)\, x + a_m(y) = 0 \\ g(x, y) &\equiv b_0(y)\, x^n + a_1(y)\, x^{n-1} + \dots + b_{n-1}(y)\, x + b_n(y) = 0 \end{aligned} \qquad [2]$$

en las que a y b indican polinomios en y cuyo grado máximo es el índice.

Si las dos ecuaciones [2] tienen una solución común $x = \xi$, $y = \eta$, las dos ecuaciones con la única incógnita x.

$$\begin{aligned} a_0(\eta)\, x^m + a_1(\eta)\, x^{m-1} + \dots + a_m(\eta) &= 0 \\ b_0(\eta)\, x^n + b_1(\eta)\, x^{n-1} + \dots + b_n(\eta) &= 0 \end{aligned} \qquad [3]$$

tienen una solución común $x = \xi$; y recíprocamente. Para que sea así, es necesario y suficiente que sea nula la resultante de las ecuaciones [3], es decir, que se anule para $y = \eta$, la resultante de las [2]. Si llamamos $R(y)$ a ésta, cada raíz η de la ecuación $R(y) = 0$, llevada a las [2], nos da un sistema de dos ecuaciones con una raíz común; si dicha solución es $x = \xi$, la solución del sistema será $x = \xi$, $y = \eta$.

Como $R(y)$ es de peso mn en los coeficientes a, b y éstos son polinomios en y de grado no superior al índice, resulta que $R(y)$ será a lo sumo de grado mn; luego existirán a lo sumo mn valores $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{mn}$ de y, que sustituidos en [2] dan ecuaciones con una raíz común. Haciendo el mismo razonamiento previa permutación de los papeles de x e y, se llegaría a una resultante función de x

que sería a lo sumo de grado mn y sus soluciones asociadas convenientemente a los anteriores valores de y dan las soluciones del sistema, que son, por tanto, a lo sumo mn.

Podemos, pues, enunciar el siguiente.

TEOREMA DE BEZOUT.—*Un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas admite en general un número de soluciones igual al producto de sus grados.*

O en lenguaje geométrico: *dos curvas algebraicas planas se cortan en general en un número de puntos igual al producto de sus órdenes* (*).

Las excepciones que pueden presentarse proceden de que $R(y)$ o $R(x)$ tengan raíces múltiples o porque sean idénticamente nulas, en cuyo último caso las curvas tienen una parte común; pero la discusión completa sale de los límites de este Curso.

EJEMPLO:

Para el sistema:

$$x^2 + y^2 - 25 = 0$$
$$3x^2 + y^2 - 14x - 1 = 0$$

la resultante es:

$$R(y) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & y^2 - 25 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & y^2 - 25 \\ 3 & -14 & y^2 - 1 & 0 \\ 0 & 3 & -14 & y^2 - 1 \end{vmatrix} = 4y^2 - 100y^2 + 576$$

cuyas raíces son $y = \pm 3$, $y = \pm 4$.

Para $y = \pm 3$ el sistema se transforma en:

$$x^2 - 16 = 0$$
$$3x^2 - 14x + 8 = 0$$

que nos da un primer sistema de soluciones:

$$x = 4 \qquad x = 4$$
$$y = 3 \qquad y = -3$$

Análogamente puede encontrar el lector las soluciones:

$$x = 3 \qquad x = 3$$
$$y = 4 \qquad y = -4$$

(*) Para una demostración completa del teorema general de Bezout, véanse los tratados de *Geometría algebraica*, de Severi y Van der Werden, o el *Curso de Análisis Matemático*, de Severi.

5. RESOLUCION NUMERICA

El método de Newton-Raphson para resolver el sistema:

$$f(x, y) = 0$$
$$\phi(x, y) = 0$$

parte, como en el caso de una incógnita, de una solución aproximada (x_0, y_0), y, desarrollando por la fórmula de Taylor, limitándose a los primeros términos se tienen las ecuaciones aproximadas:

$$f(x_0, y_0) + hf'_x(x_0, y_0) + kf'_y(x_0, y_0) = 0$$

$$\phi(x_0, y_0) + h\phi'_x(x_0, y_0) + k\phi'_y(x_0, y_0) = 0$$

Resolviendo en h y k, tenemos nuevas como soluciones:

$$x_1 = x_0 + h = x_0 + \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} -f(x_0, y_0) & f_y(x_0, y_0) \\ -\phi(x_0, y_0) & \phi_y(x_0, y_0) \end{vmatrix}$$

$$x_1 = y_0 + k = y_0 + \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} f_x(x_0, y_0) & -f(x_0, y_0) \\ \phi_x(x_0, y_0) & -\phi(x_0, y_0) \end{vmatrix}$$

en que:

$$\Delta = \begin{vmatrix} f_x(x_0, y_0) & f_y(x_0, y_0) \\ \phi_x(x_0, y_0) & \phi_y(x_0, y_0) \end{vmatrix}$$

se supone $\neq 0$.

También se generaliza el método de iteración poniendo las ecuaciones en la forma:

$$x = F(x, y)$$
$$y = G(x, y)$$

Suponiendo que en el entorno de una primera solución sea:

$$|F_x| + |F_y| < k < 1, \qquad |G_x| + |G_y| < k < 1$$

se puede ver la convergencia de la sucesión de iteraciones.

EJEMPLO:

Sea el sistema:

$$x + \cos x \cosh y = \frac{5\pi}{2}$$

$$y + \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y = 0$$

que se puede escribir:

$$y = \cosh^{-1}\left(\frac{\frac{50}{2} - x}{\cos x}\right), \qquad x = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{y}{\operatorname{senh} y}\right)$$

Se toma $x = 0$ en la 1.ª ecuación, se calcula y, se sustituye en la 2.ª, se calcula x, etc. Se obtiene así:

x	y
0	2,75
0,36	2,769
0,356	2,768

Aplíquese también el método de Newton.

EJERCICIOS

1. Interpretación geométrica del método de Newton-Raphson para dos ecuaciones.

2. Aplicar el método de Newton-Raphson al sistema:

$$x + 3 \log x - y^2 = 0$$
$$2x^2 - xy - 5x + 1 = 0$$

partiendo de la solución aproximada ($x = 1{,}4$, $y = -1{,}5$).

3. Idem. el método de iteración al mismo sistema al anterior sistema y a los siguientes:

$$\left.\begin{aligned} x^3 - 3xy^2 &= 4 \\ 3x^2y - y^3 &= 2 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} 2x &= \operatorname{sen}\frac{1}{2}(x - y) \\ 2y &= \cos\frac{1}{2}(x + y) \end{aligned}\right\}$$

9

La interpolación

1. EL PROBLEMA DE LA INTERPOLACION

Cuando se tiene una tabla de valores de una función puede interesar obtener valores de la función para valores de la variable que no figuran en la tabla. Tal es el problema de la *interpolación*, que podemos formular más concretamente así: dados n pares de valores correspondientes (x_n, y_n), obtener una función que tome valores:

$$y_1, y_2, \ldots, y_n$$

para los correspondientes de x y que permita, por tanto, calcular valores de y para valores de x intermedios; en este problema queda indeterminado el tipo de función que se ha de tomar y conviene, generalmente, utilizar las funciones más sencillas, que son las funciones enteras o polinomios.

Generalmente los datos tendrán una de estas procedencias: 1.° valores de una función conocida (log, sen, etc.); 2.° valores calculados experimentalmente en el estudio de un fenómeno cuya expresión matemática es desconocida.

2. INTERPOLACION LINEAL

Al hacer uso de las tablas de logaritmos en el Bachillerato, ya se resuelve el problema de calcular valores no tabulados por el método sencillo de la interpolación lineal.

La idea es simplemente sustituir la curva entre dos puntos por la cuerda que los une.

Considerados dos valores x_1 y x_2 de la variable, para los que la función toma los valores y_1 e y_2, respectivamente, la ecuación de la recta $A_1 A_2$ es:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1)$$

Fig. 1

y el valor de la función para un punto intermedio viene dado aproximadamente por:

$$y \simeq \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1) + y_1$$

es decir, por la ordenada del punto de abscisa x en la cuerda que une $A_1 A_2$.

3. FORMULA DE LAGRANGE

El polinomio de grado $n - 1$:

$$P_1 = \frac{(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_n)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \dots (x_1 - x_n)}$$

es igual a 1 para $x = x_1$, e igual a cero para $x = x_2$, $x = x_3$, ..., $x = x_n$.

Resulta, pues, que el polinomio:

$$y = P(x) = P_1 y_1 + P_2 y_2 + \dots + P_n y_n \qquad [1]$$

resuelve el problema, pues es:

$$P(x_1) = y_1, \qquad P(x_2) = y_2, \qquad P(x_3) = y_3 \dots P(x_n) = y_n$$

Esta es la *fórmula de* LAGRANGE.

La solución es única, pues si hubiera otro polinomio $Q(x)$ con la misma propiedad, la diferencia:

$$P(x) - Q(x)$$

será un polinomio de grado $n - 1$ (a lo sumo), que se anularía para n valores de la variable:

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

y, por tanto, idénticamente nulo, en virtud del principio de identidad (*).

(*) Pues si el polinomio $P(x) - Q(x)$ de grado $n - 1$ se anula para $x = x_1, x_2 \dots x_{n-1}$, será:

$$P(x) - Q(x) = c_0(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{n-1})$$

por anularse para $x = x_n$ será:

$$0 = c_0(x_n - x_1)(x_n - x_2) \dots (x - x_{n-1});$$

luego,

$$c_0 = 0$$

ya que los otros factores no son 0. Así resulta que el polinomio de grado $n - 2$; etc.

La fórmula de Lagrange es especialmente interesante cuando hay que interpolar para los mismos valores fijos de x y varios conjuntos distintos de las y. Entonces son fijos los $P_1, P_2, \ldots, P_n$.

4. METODO DE ITERACION (AITKEN)

El paso de la interpolación lineal a la cuadrática, de ésta a la cúbica, etc., requiere cálculos laboriosos con el método de Lagrange.

El siguiente método utiliza los cálculos de los polinomios anteriores:

Si ponemos la fórmula de interpolación lineal en la forma:

$$l_{0,1}(x) = \frac{1}{x_1 - x_0} \begin{vmatrix} y_0 & x_0 - x \\ y_1 & x_1 - x \end{vmatrix}$$

podemos poner la fórmula de interpolación cuadrática en la forma:

$$l_{0,1,2}(x) = \frac{\begin{vmatrix} l_{0,1}(x) & x_0 - x \\ l_{1,2}(x) & x_2 - x \end{vmatrix}}{x_2 - x_0}$$

Es decir, aplicando la fórmula de interpolación lineal a $l_{0,1}(x)$, $l_{1,2}(x)$ para $x = x_0$, $l_{0,1,2}(x_0) = y_0$, para $x = x_2$, $l_{0,1,2}(x_2) = y_2$, y para $x = x_1$.

$$l_{0,1,2}(x_1) = \frac{l_{0,1}(x_1)(x_2 - x_1) - l_{1,2}(x_1)(x_0 - x_1)}{x_2 - x_0} =$$

$$= y_1 \quad \frac{(x_2 - x_1) - (x_0 - x_1)}{x_2 - x_0} \quad = y_1$$

Análogamente:

$$l_{0,1,2,3}(x) = \frac{\begin{vmatrix} l_{0,1,2}(x) & x_0 - x \\ l_{1,2,3}(x) & x_3 - x \end{vmatrix}}{x_2 - x_0}$$

Los cálculos se disponen así:

$$\begin{array}{llllll} x_0 & y_0 & & & & x_0 - x \\ x_1 & y_1 & l_{0,1}(x) & & & x_1 - x \\ x_2 & y_2 & l_{1,2}(x) & l_{0,1,2}(x) & & x_2 - x \\ x_3 & y_3 & l_{2,3}(x) & l_{1,2,3}(x) & l_{0,1,2,3}(x) & x_3 - x \end{array}$$

Aplíquese a ejemplos anteriores.

He aquí el cálculo de *sen* 4,238 a partir de los datos de las primeras columnas:

x	sen x	1.er grado	2.º grado	3.er grado	$x_1 - x$
4,0	– 0,75680				– 238
4,1	– 0,81827	– 0,90311			– 138
4,2	– 0,87157	– 0,89182	– 0,88968		– 38
4,3	– 0,91616	– 0,88852	– 0,88954	– 0,88957	62

5. FORMULA DE NEWTON

Si llamamos Q_p al polinomio de grado $p - 1$, que toma los valores $y_1, y_2, \dots, y_p$ en los puntos $x_1, x_2, \dots, x_p$ podremos escribir el polinomio Q_n que resuelve el problema en la forma:

$$y = Q_n = Q_1 + \sum_{p=2}^{n} (Q_p - Q_{p-1}) \qquad [1]$$

Ahora bien: el polinomio $Q_p - Q_{p-1}$ se anula en los puntos $x_1, x_2, \dots, x_{p-1}$, y como es de grado $p - 1$ se podrá escribir en la forma:

$$a_p(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{p-1}) \qquad [1]$$

y la fórmula [1] quedará:

$$y = f(x) = Q_n(x) = a_0 + a_1(x - x_1) + a_2(x - x_1)(x - x_2) + \dots +$$
$$+ a_{n-1}(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{n-1})$$

Esta es la *fórmula de* NEWTON, en la cual los coeficientes se calculan del modo siguiente:

Pongamos:

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f_1(x) = a_1 + a_2(x - x_2) + \dots + a_{n-1}(x - x_2) \dots (x - x_{n-1})$$

$$\frac{f_1(x) - f_1(x_2)}{x - x_2} = f_2(x) = a_2 + a_3(x - x_3) + \dots + a_{n-1}(x - x_3) \dots (x - x_{n-1})$$

....

....

Se tiene así:

$$a_0 = f(x_1), \qquad a_1 = f_1(x_2), \qquad a_2 = f_2(x_3), \ldots \qquad [3]$$

y la fórmula de Newton adopta la expresión:

$$f(x) = f(x_1) + (x - x_1)f_1(x_2) + (x - x_1)(x - x_2)f_2(x_3) + \\ + \ldots + (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_{n-1})f_{n-1}(x_n)$$

Esta fórmula tiene interés especial en el caso de valores de x equidistantes que luego veremos.

6. DIFERENCIAS TABULARES

Tiene interés para deducir otras fórmulas de interpolación considerar las *diferencias tabulares.*

Las primeras diferencias tabulares se definen por la relación:

$$\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$$

Las diferencias de orden superior son:

$$\Delta^2 y_n = \Delta y_{n+1} - \Delta y_n = y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n$$
$$\Delta^3 y_n = \Delta^2 y_{n+1} - \Delta^2 y_n = y_{n+3} - 3y_{n+2} + 3y_{n+1} - y_n$$

Tales diferencias se pueden escribir en forma de tabla del siguiente modo:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
x_0	y_0				
		Δy_0			
$x_0 + \Delta x_0$	y_1		$\Delta^2 y_0$		
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$	
$x_0 + 2\Delta x_0$	y_2		$\Delta^2 y_1$		$\Delta^4 y_0$
		Δy_2		$\Delta^3 y_1$	
$x_0 + 3\Delta x_0$	y_3		$\Delta^2 y_2$		
		Δy_3		.	
$x_0 + 4\Delta x_0$	y_4		.		
		.		.	
...	.		.		
		.		.	
...	.		.		
		.		.	

EJEMPLO:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
-2	12				
		-9			
-1	3		6		
		-3		0	
0	0		6		0
		3		0	
1	3		6		
		9			
2	12				

7. APLICACION DEL CALCULO DE DIFERENCIAS A LA DETERMINACION DE VALORES NUMERICOS DE UN POLINOMIO

Si consideramos la potencia $y = x^2$, su diferencia o incremento es:

$$(x + h)^2 - x^2 = x^2 + 2hx + h^2 - x^2 = 2hx + h^2$$

es decir, un polinomio de primer grado en x. Las diferencias de este:

$$2h(x + h) + h^2 - (2hx + h^2) = 2h^2$$

es decir, independientes de x, luego constante. Vemos así que las diferencias segundas de la potencia x^2, o más general, de un polinomio de segundo grado, son constantes. Análogamente, se ve que las diferencias n-simas de un polinomio de grado n son constantes.

EJEMPLO:

Formemos las diferencias sucesivas de la función $y = x^3$:

Como se ve, los incrementos terceros son constantes.

Esta propiedad puede utilizarse para calcular valores de un polinomio.

Basta tener en cuenta, que:

$$\Delta^2 y_{n-1} = \Delta^2 y_{n-2} + \Delta^3 y_{n-2}$$
$$\Delta y_n = \Delta y_{n-1} + \Delta^2 y_{n-1}$$
$$y_{n+1} = y_n + \Delta y_n$$

x	x^3	Δ	Δ^2	Δ^3
0	0			
1	1	1	6	6
2	8	7	12	6
3	27	19	18	
4	64	37		

Aplicando estas relaciones, calculamos la parte del cuadro por encima de la recta, mediante las potencias 0^3, 1^3, 2^3, 3^3 y sus diferencias. A partir de aquí vamos obteniendo: $18 = 12 + 6$; $37 = 19 + 18$; $64 = 27 + 37$; etc.

8. FORMULA DE NEWTON PARA VALORES EQUIDISTANTES

Si en la fórmula de NEWTON suponemos que los valores de x forman progresión aritmética,

$$x_1, \qquad x_2 = x_1 + h, \qquad x_3 = x_1 + 2h, \dots$$

obtenemos:

$$f(x_1) = y_1$$

$$f_1(x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y_1}{h}$$

$$f_2(x_3) = \frac{f_1(x_3) - f_1(x_2)}{x_3 - x_2} = \frac{\dfrac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} - \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}}{x_3 - x_2} =$$

$$= \frac{\dfrac{f(x_3) - f(x_1)}{2h} - \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{h}}{h} =$$

$$= \frac{f(x_3) - f(x_1) - 2f(x_2) + 2f(x_1)}{2h^2} = \frac{\Delta^2 y_1}{2h^2}$$

....

luego:

$$f(x) = y_1 + \frac{(x - x_1)}{1! \cdot h} \Delta y_1 + \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{2! \cdot h^2} \Delta^2 y_1 +$$

$$+ \dots + \frac{(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})}{(n - 1)!\, h^{n-1}} \cdot \Delta^{n-1} y_1.$$

EJEMPLO:

x	y	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4	Δ^5
− 4	200					
		− 100				
− 2	100		1			
		− 99		128		
0	1		129		23	
		30		151		450
2	31		280		473	
		310		624		
4	341		904			
		1214				
6	1555					

la fórmula de NEWTON da:

$$y = 200 + \frac{-100}{1! \cdot 2}(x+4) + \frac{1}{2! \cdot 2^2}(x+4)(x+2) +$$

$$+ \frac{128}{3! \cdot 2^3}(x+4)(x+2)\,x + \frac{23}{4! \cdot 2^4}(x+4)(x+2)\,x\,(x-2) +$$

$$+ \frac{450}{5! \cdot 2^5}(x+4)(x+2)\,x\,(x-2)(x-4).$$

9. INTERPOLACION INVERSA Y EXTRAPOLACION

El problema de la interpolación inversa consiste en determinar para un valor de y el correspondiente x. Cualquiera de las fórmulas de interpolación expuestas permite resolver este problema, sin más que tomar y como variable independiente y x como dependiente.

Otra cuestión interesante es la extrapolación.

Las fórmulas explicadas de interpolación se han aplicado siempre para calcular valores de la función correspondientes a valores de x comprendidos entre los datos. Si se aplican al cálculo de valores de la función correspondientes a valores de x fuera del intervalo de los datos, se tiene la *extrapolación*. Si no es conocida la forma general de la función, cuyos valores se calculan, el proceso de extrapolación requiere un cuidado especial y su intervalo de validez debe considerarse muy restringido. Naturalmente que en el caso de la interpolación por partes proporcionales no tiene sentido la extrapolación.

Un ejemplo del cuidado que hay que tener al emplear las fórmulas de interpolación es el siguiente:

Sean los datos:

x	$f(x)$
1	0
4	1
16	2
64	3
256	4

La fórmula de Lagrange da:

$$f(x) = 1 \cdot \frac{(x-1)(x-16)(x-64)(x-256)}{(4-1)(4-16)(4-64)(4-256)} + \ldots$$

y sustituyendo resulta: $f(32) = -0{,}263$, siendo así que el verdadero valor es $+2{,}5$. Es interesante que el lector haga la representación gráfica de la función de Lagrange y la compare con la que ha suministrado los datos a saber $x = 4^y$.

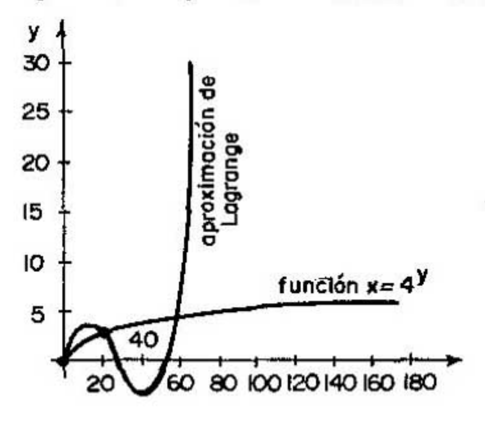


Fig. 2

Este ejemplo pone de manifiesto la necesidad de antes de utilizar una fórmula de interpolación conocer el comportamiento de la función.

10. RESTO EN LAS FORMULAS DE INTERPOLACION

Tiene interés dar una acotación del error que se puede cometer al utilizar una fórmula de interpolación para aproximar una función. Para este fin puede valer el siguiente teorema:

Si $f(x)$ tiene derivadas continuas hasta el orden n en (a, b) y en este intervalo es $f(x) - P_n(x) = 0$ para $x = x_1, \ldots, x_n$ (valores de dicho intervalo), se tiene:

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^n(\xi)(x - x_1)\ldots(x - x_n)}{n!}$$

en que ξ está entre el menor y mayor de los números $x_1, \ldots, x_n$.

Se define una función auxiliar:

$$F(x) = f(x) - P_n(x) - k(x - x_1)\ldots(x - x_n) \qquad [1]$$

en que k es una constante tal que fijado $x = x'$ en (a, b), es:

$$f(x') - P_n(x') - k(x' - x_1)\ldots(x' - x_n) = 0 \qquad [2]$$

De este modo resulta que $F(x)$ se anula en $n + 1$ puntos, $F'(x)$ se anulará, por el teorema de Rolle, en n, y finalmente $F^n(x)$ se anulará en un punto ξ entre el máximo y el mínimo de los $x_1, \ldots, x_n$.

Como derivando (1) resulta:

$$F^{(n}(x) = f^{(n}(x) - n!k$$

será:

$$0 = f^{(n}(\xi) - n!k$$

luego:

$$k = \frac{f^{n}(\xi)}{n!}$$

valor que sustituido en (2) nos da (suprimiendo los acentos de las x):

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n}(\xi)}{n!}(x - x_1) \ldots (x - x_n)$$

11. OTROS TIPOS DE INTERPOLACION

No son los polinomios las únicas funciones que se pueden utilizar como funciones de interpolación, aunque, en general, son las más aplicadas por sus propiedades sencillas; se pueden derivar e integrar fácilmente, sus coeficientes se pueden determinar por fórmulas lineales sencillas, etc. Sin embargo, si la función que se ha de aproximar es periódica puede tener interés considerar funciones de interpolación trigonométricas:

$$I(x) = A + B \ cos \ x + C \ sen \ x$$

Si la función se hace infinita en el entorno de ciertos puntos puede interesar tomar funciones de interpolación racionales:

$$I(x) = \frac{A + Bx}{C + Dx}$$

EJERCICIOS

1. Mediante la fórmula de LAGRANGE determinar la parábola cúbica que pasa por los puntos $(-1, 2)$; $(0, 3)$; $(1, 2)$; $(2, 0)$.

2. Determinar un polinomio que para $x = 0; 1; 3; 5;$ tome los valores $y = 0; 15; 7; 1{,}83$.

3. Si $y = 2x^3 - x^2 + 3x + 1$, calcular los valores de y correspondientes a $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ y formar la tabla de diferencias.

4. Dada la tabla de valores:

x	-3	-2	-1	0	1
y	16	7	4	1	-8

encontrar, mediante la fórmula de Newton, una expresión para y como función de x.

5. Calcular los valores del polinomio $y = 5x^3 + 3x^2 + 8x + 4$ cuando x toma valores que comienzan en $x = 0$ y van diferenciándose en 0,1.

6. Aplicar las fórmulas de Aitken a los ejercicios 1, 2 y 4.

10

Aproximación de funciones

1. PROBLEMA GENERAL

El problema general de aproximación de una función $f(x)$ por una combinación lineal finita de funciones de un sistema:

$$\phi_0(x), \phi_1(x), \ldots, \phi_n(x)$$

consiste en determinar los coeficientes $y_0, y_1, \ldots, y_n$ tales que la función:

$$\phi(x) = y_0\phi_0(x) + y_1\phi_1(x) + \ldots + y_n\phi_n(x)$$

se pueda considerar como una «aproximación buena» de la función dada $f(x)$.

En el problema tratado de la interpolación por polinomios las funciones son polinomios, por ejemplo, $\phi_k(x) = x^k$ y la condición de «buena aproximación» se traduce en las condiciones $\phi(x_i) = f(x_i)(i = 0, 1, \ldots, n)$ que permite determinar las constantes $y_0, y_1, \ldots, y_n$.

Otra manera de establecer la condición de «buena aproximación» es mediante una condición local, a saber:

$$\phi^{(k}(x_0) = f^{(k}(x_0)(k = 0, 1, \ldots, n)$$

Esta condición conduce, suponiendo las funciones polinomios a la fórmula de Taylor.

Más general, es suponer, por ejemplo:

$$f(x_i) = \phi(x_i), (i = 0, 1, \ldots, r)$$
$$f^{(k}(x_{i+1}) = \phi^{k}(x_{i+1}), (k = 0, 1, \ldots, n - r)$$

2. APROXIMACION DE FUNCIONES POR SERIES

Cuando es posible aproximar una función por su desarrollo de Taylor en el entorno de un punto a se tiene un medio para calcular valores de la función en puntos próximos a a, mediante tal desarrollo:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots$$

$$+ \frac{f^{n-1}(a)}{(n-1)!}(x - a)^{n-1} + \frac{f^n(a + \theta h)}{n!}(x - a)^n$$

Como es sabido, de esta expresión se llega al desarrollo en serie por paso al límite para $n \to \infty$ para lo cual es suficiente que tienda a cero el resto. El cálculo del valor en un punto x próximo a a se reduce, pues, al cálculo del valor numérico de un polinomio y el error de truncación es el valor del resto.

Se tiene, por ejemplo:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{e^{\theta x}}{n!}x^n$$

Para acotar el error que se comete al calcular el valor de e^x por el polinomio:

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

tenemos que tener en cuenta 1.º los errores de redondeo de los coeficientes y de x, y el error que, como consecuencia de ellos, se comete en el cálculo del valor numérico del polinomio y 2.º el error de truncación que viene dado por el resto:

$$\frac{e^{\theta x}}{n!}x^n$$

Para el primer cálculo se aplica lo visto en la lección 2. Para el error de truncación si suponemos:

$$0 < x < 1 \qquad \text{será} \qquad R_n < \frac{e}{n!}$$

y si queremos que $R_n < \varepsilon$ deberá ser $n! > \frac{e}{\varepsilon}$.

Si consideramos valores $0 > x > -1$ al ser la serie alternada, como el resto es: $|R_n| < \left|\frac{x^n}{n!}\right| < \frac{1}{n!}$ bastará para que $\frac{1}{n!} < \varepsilon$ que sea $n! > \frac{1}{\varepsilon}$.

Si $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-7}$, $n! > 2 \cdot 10^6$ y se puede ver que basta que $n = 10$.

EJERCICIOS

1. Aproximar la función $y = \cos x$ por la suma:

$$S_n = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Ver que si $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ basta tomar $n = 5$ para que $\varepsilon < 5 \cdot 10^{-8}$.

2. El mismo problema para $y = \operatorname{sen} x$.

3. Mediante el desarrollo:

$$\operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \dots$$

$|x| < 1$, ver cuantos términos hay que tomar para que $\varepsilon < 0{,}001$, siendo $0 < x < \frac{1}{2}$.

4. Desarrollar $ln\ x$ en potencias de $x - 1$ y acotar el resto.

11

Ajuste de curvas

1. PLANTEO DEL PROBLEMA

Constantemente los ingenieros, físicos, químicos, economistas, etc., están introduciendo fórmulas nuevas para la descripción de fenómenos naturales.

En ocasiones, el estudio teórico del fenómeno puede permitir deducir la fórmula matemática buscada que ligue las magnitudes consideradas. Tal sucede, por ejemplo, con la fórmula de los gases perfectos $pv = cte$, que puede deducirse por las consideraciones de la teoría cinética de los gases.

Pero en muchos fenómenos se carece de base teórica suficiente para llegar a tal fórmula, y únicamente se tiene un conjunto de datos experimentales que conducen al siguiente problema de extraordinario interés.

Supongamos una ley experimental que liga dos variables x, y, y de la cual conocemos un cierto número de pares de valores dados por la:

Tabla:	x_1	x_2	x_3	...	x_n
	y_1	y_2	y_3	...	y_n

Se trata de determinar una fórmula matemática $y = f(x)$, *que represente dicha ley experimental.*

Geométricamente, los pares de valores de la tabla representan un conjunto de puntos del plano y se trata de obtener una curva de ecuación conocida que pase *aproximadamente* por ellos.

No tratamos, como en el problema de interpolación, de que la curva pase exactamente por todos los puntos. Como estos puntos son obtenidos por medidas experimentales que vienen afectadas de errores, se comprende que no está justificado que tratemos de que la curva pase exactamente por ellos. Lo que interesa es que la ecuación de la curva sea de tipo sencillo y se adapte o *ajuste* lo mejor posible al conjunto de puntos dados.

El problema es en cierto modo indeterminado, ya que parece que infinidad

de funciones matemáticas pueden dar soluciones. Se trata de obtener, como hemos dicho, una función lo más sencilla posible que se adapte bien al conjunto de puntos y en cuya expresión figuren uno o más parámetros o constantes indeterminadas, las cuales se determinan por la condición de que las diferencias entre valores de y observadas y los calculados por la fórmula sean lo menores posible.

Hay, pues, dos problemas:

1.° Elección de la función de *ajuste;* y

2.° Determinación de los parámetros.

2. ELECCION DE TIPO DE FUNCION DE AJUSTE

No se puede dar reglas generales. A veces interesa la sencillez de la fórmula y basta una tosca aproximación, que luego podrá mejorarse por métodos más finos:

Puede ocurrir que los valores y dados por la observación sean prácticamente constantes, y entonces se tratará de representar la ley empírica por la ecuación:

$$y = cte.$$

Si los puntos experimentales están sensiblemente en una recta no paralela al eje x, la ley empírica estudiada se puede representar por una función lineal:

$$y = n + mx.$$

Si los puntos están aproximadamente en una parábola, cuyo eje es paralelo al eje de coordenadas, se puede ensayar representar la ley experimental por una función de segundo grado:

$$y = a + bx + cx^2.$$

Cuando los valores de y crecen lentamente al crecer x, se puede probar una función logarítmica:

$$y = k \log x$$

y si los valores de y crecen con más rapidez que los de x, se ensayará una curva exponencial:

$$y = ke^{cx}$$

En la tabla siguiente se dan algunos otros tipos (tomados de V. HUNTINGTON). Para ver si uno de estos tipos es adecuado a nuestros datos, se dibujan los puntos, tomando las abscisas y ordenadas que se indican a la derecha de la

tabla. Si los puntos así obtenidos están sensiblemente en línea recta, se toma la función correspondiente para el ajuste.

Ecuación	Abscisa	Ordenada
1) $y = mx + n$	x	y
2) $y = kx^m$	$\log x$	$\log y$
3) $y = ke^{cx}$	x	$\log y$
4) $y = a + \frac{b}{x}$	$\frac{1}{x}$	y
5) $y = \frac{x}{ax + b}$	x	$\frac{x}{y}$
6) $y = k + be^{ax}$	x	$\log \Delta y$

Otro criterio es formar incrementos sucesivos que indica la adjunta tabla y ver si son constantes.

Ecuación	Incrementos	Criterio de aceptación
$y = mx + n$	Δy	$\Delta y = \text{cte.}$
$y = hx^m$	$\Delta(\log y)$	$\Delta(\log y) = \text{cte.}$
$y = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$	$\Delta y, \Delta^2 y, \dots, \Delta^n y$	$\Delta^n y = \text{cte.}$
$y^2 = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$	$\Delta y^2, \Delta^2 y^2, \dots, \Delta^n y^2$	$\Delta^n y^2 = \text{cte.}$
$\log y = a + bx + \dots + kx^n$	$\Delta(\log y), \dots, \Delta^n(\log y)$	$\Delta^n(\log y) = \text{cte.}$
$y = ke^{cx}$	$\Delta(\log y)$	$\Delta(\log y) = \text{cte.}$
$y = k + be^{ax}$	$\Delta y, \log \Delta y, \Delta(\log \Delta y)$	$\Delta(\log \Delta y) = \text{cte.}$

EJEMPLO:

Para la función:

$$y = k + be^{ax}$$

tenemos:

$$\Delta y = be^{a(x+h)} - be^{ax} = be^{ax}(e^{ah} - 1)$$

luego:

$$\log \Delta y = \log b + \log(e^{ah} - 1) + (a \log e) \cdot x$$

por tanto:

$$\Delta(\log \Delta y) = (a \log e)(x + h) - (a \log e)x = (a \log e) \cdot h = \text{cte.}$$

Haga el alumno la correspondiente comprobación para las otras funciones.

3. METODOS DE AJUSTE

Elegida la función de ajuste, se presentan varios métodos:

a) *Método de los puntos seleccionados.*

Es poco exacto y sólo se aplica en casos en que interese muy poca aproximación.

Supongamos que se trata de ajustar la parábola de ecuación:

$$y = a + bx + cx^2$$

a un conjunto de puntos.

Como en la ecuación figuran tres parámetros, a, b, c (constantes arbitrarias que varían de una curva a otra del mismo tipo), éstos se determinan eligiendo tres puntos (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) y estableciendo que la curva pasa por ellos:

$$y_1 = a + bx_1 + cx_1^2$$

$$y_2 = a + bx_2 + cx_2^2$$

$$y_3 = a + bx_3 + cx_3^2$$

Estas tres ecuaciones nos permitirán determinar a, b, c. Como se ve, el método no tiene en cuenta para nada los restantes puntos del conjunto y puede dar lugar a resultados defectuosos.

b) *Método gráfico.*

En el caso de ajuste por una recta (al que se reducen los otros) mediante un hilo tenso o una regla transparente, se traza una recta que pase lo más próxima posible al conjunto de puntos y se miden su pendiente y ordenada en el origen.

c) *Método de las medias.*

Supongamos que se trata de ajustar una recta.

Se determinan el coeficiente angular y ordenada en el origen, no por el método gráfico, sino por cálculo. Se sustituyen las coordenadas de los diversos puntos:

$$y_1 = ax_1 + b, \qquad y_2 = ax_2 + b, \qquad \ldots, \qquad y_n = ax_n + b$$

Agrupamos las ecuaciones anteriores en dos conjuntos del mismo número, aproximadamente; por ejemplo, si es $y_p = ax_p + b$ la ecuación que ocupa aproximadamente el lugar medio, agrupamos en el primer conjunto de la 1.ª a la p-sima, y en el segundo, desde la $(p + 1)$-esima hasta la n-sima; se suman miem-

bro a miembro ordenadamente las ecuaciones de cada grupo y dividimos por el número de términos, obteniendo las dos ecuaciones:

$$\frac{y_1 + y_2 + \dots + y_p}{p} = a\,\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_p}{p} + b$$

$$\frac{y_{p+1} + y_{p+2} + \dots + y_n}{n-p} = a\,\frac{x_{p+1} + x_{p+2} + \dots + x_n}{n-p} + b$$

y mediante este sistema, se calculan los valores de a y b. Este método se usa algunas veces, aunque por la arbitrariedad de la división en los dos grupos puede dar resultados distintos.

d) *Método de los mínimos cuadrados.*

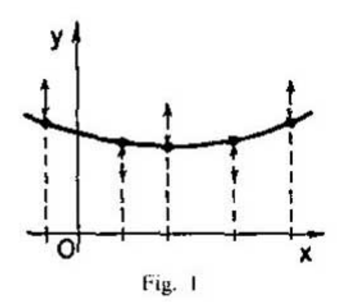


Fig. 1

Se usa ordinariamente en los casos en que se buscan resultados más precisos.

Consideremos la función:

$$y = P(x, a, b, c, \dots, h);$$

los parámetros $a, b, c, \dots, h$, se han de determinar con la condición de que sea mínima la expresión:

$$[P(x_1, a, b, \dots, h) - y_1]^2 + $$
$$+([P(x_2, a, b, \dots, h) - y_2]^2 + \dots + [P(x_n \cdot a, b, \dots, h) - y_n]^2$$

que representan la suma de cuadrados de diferencias entre las ordenadas dadas y las de la curva, correspondientes a las mismas abscisas.

Para fijar las ideas supondremos el problema del ajuste por una función lineal de la forma:

$$y = au(x) + bv(x) + cw(x) \qquad [1]$$

en que $u(x)$, $v(x)$, $w(x)$, son funciones conocidas, y a, b, c, parámetros que hay que determinar.

Por ejemplo, un caso particular de [1] es la parábola:

$$y = a + bx + cx^2$$

El problema es determinar a, b, c, de modo que sea mínima la suma de cuadrados de las desviaciones según la ordenada:

$$\Sigma e_k^2 = \Sigma(au_k + bv_k + cw_k - y_k)^2 \qquad [2]$$

Supongamos que sean a_0, b_0, c_0, los valores buscados de a, b, c. Cuando a varía, a_0 debe hacer mínima la suma [2], supuestos sustituidos en ella, b, c, por b_0, c_0.

Si ponemos para abreviar:

$$z_k = bv_k + cw_k - y_k \qquad [3]$$

queda:

$$\Sigma \varepsilon_k^2 = \Sigma(au_k + z_k)^2 = a^2 \,\Sigma u_k^2 + 2a\,\Sigma u_k z_k + \Sigma z_k^2$$

como esto es un trinomio de segundo grado en a (*), su mínimo lo alcanza para:

$$a_0 = -\frac{\Sigma u_k z_k}{\Sigma u_k^2}$$

que puede escribirse:

$$\Sigma a_0 u_k^2 + \Sigma w_k z_k = 0$$

o bien:

$$\Sigma u_k(a_0 u_k + z_k) = 0$$

y sustituyendo el valor [3], resulta que a_0 debe satisfacer la ecuación (**):

$$\Sigma u_k(a_0 u_k + b_0 v_k + c_0 w_k - y_k) = 0$$

Análogamente, se obtiene que b_0, c_0, deben verificar las ecuaciones:

$$\Sigma v_k(a_0 u_k + b_0 v_k + c_0 w_k - y_k) = 0$$

$$\Sigma w_k(a_0 u_k + b_0 v_k + c_0 w_k - y_k) = 0$$

(*) Una propiedad frecuentemente usada de la función cuadrática $y = Ax^2 + 2Bx + C$ es que si $A > 0$, toma un valor mínimo para $Ax + B = 0$, y dicho valor mínimo es:

$$\frac{AC - B^2}{A}$$

Para verlo basta poner

$$Ax^2 + 2Bx + C = \frac{1}{A}(A^2x^2 + 2ABx + AC) = \frac{1}{A}\left[(Ax + B)^2 + (AC - B^2)\right]$$

y como el primer sumando es ≥ 0, se obtiene el mínimo para $Ax + B = 0$.

(**) Esta ecuación se puede obtener también formando $\frac{\partial \Sigma \varepsilon_n^2}{\partial a}$ e igualando a cero que, según se sabe, es condición necesaria de un mínimo. Y análogamente resultan las otras ecuaciones.

Estas ecuaciones que deben verificar a, b, c, se llaman *ecuaciones normales* y se escriben en la forma desarrollada siguiente:

$$(u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2)\, a + (v_1 v_1 + \dots + u_n v_n)\, b + (u_1 w_1 + \dots +$$
$$+ u_n w_n)\, c - (u_1 y_1 + \dots + u_n y_n) = 0$$

$$(v_1 u_1 + v_2 u_2 + \dots + v_n u_n)\, a + (v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2)\, b + u_1 w_1 + \dots +$$
$$+ u_n w_n)\, c - (v_1 y_1 + \dots + v_n y_n) = 0$$

$$(w_1 u_1 + w_2 u_2 + \dots + w_n u_n)\, a + (v_1 w_1 + \dots + v_n w_n)\, b + (w_1^2 + \dots +$$
$$+ w_n^2)\, c - (w_1 y_1 + \dots + w_n y_n) = 0$$

o bien, abreviadamente, en forma simbólica:

$$[uu]\, a + [uv]\, b + [uw]\, c - [uy] = 0$$
$$[vu]\, a + [vv]\, b + [vw]\, c - [vy] = 0$$
$$[wu]\, a + [wv]\, b + [ww]\, c - [wy] = 0$$

las cuales se escriben fácilmente a partir de las llamadas *ecuaciones de condición:*

$$au_1 + bv_1 + cw_1 - y_1 = 0$$
$$au_2 + bv_2 + cw_2 - y_2 = 0$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$au_n + bv_n + cw_n - y_n = 0$$

La resolución numérica del sistema de ecuaciones normales se hace por el método de Gauss.

EJEMPLO:

Supongamos que tratamos de ajustar la curva de ecuación:

$$y = au(x) + bv(x),$$

y que:

$$a + b = 3{,}01$$
$$2a - b = 0{,}03$$
$$a + 3b = 7{,}02$$
$$3a + b = 4{,}97$$

operaremos del modo siguiente:

u	v	y	Σ	$[uu]$	$[uv]$	$[uy]$	$[u\Sigma]$
1	1	3,01	2	1	1	3,01	2
2	− 1	0,03	1	4	− 2	0,06	2
1	3	7,02	4	1	3	7,02	4
3	1	4,97	4	9	3	14,91	12
				15	5	25,00	20

$[vu]$	$[vv]$	$[vy]$	$[v\Sigma]$
1	1	3,01	2
− 2	1	− 0,03	− 1
3	9	21,06	12
3	1	4,97	4
5	12	29,01	17

con lo cual obtenemos las ecuaciones normales:

$$15a + 5b = 25$$
$$5a + 12b = 29{,}01$$

las cuales nos determinan a y b, que, sustituidos en la expresión:

$$y = au(x) + bv(x)$$

nos dará la curva buscada.

e) *Método de momentos.*

Dado un conjunto de N puntos (x_i, y_i), se define el *momento de orden* r respecto al eje de ordenadas por la expresión:

$$\frac{1}{N} \sum_{1}^{N} x_i^r y_i$$

Si queremos ajustar una curva $y = f(x, a, b, \ldots, h)$ en que entran k parámetros el método de los momentos consiste en igualar k momentos del conjunto de puntos dados a los k momentos del conjunto de N puntos: (x_i, y_i^*), en que:

$$y_i^* = f(x_i, a, b, \ldots, h)$$

son las ordenadas de puntos de la curva buscada. Así se obtienen k ecuaciones para obtener los k parámetros.

Se puede ver que si los parámetros aparecen en forma lineal, las ecuaciones que se obtienen, por este método son las mismas que por el método de mínimos cuadrados.

f) *Ajuste por polinomios ortogonales.*

Otra manera de plantear el problema de ajuste cuando se da la función $y = f(x)$ es tratar de determinar el polinomio que hace mínima la integral:

$$\int_0^1 [f(x) - a_0 \div a_1 x, \ldots, a_m x^n]^2 dx \qquad [1]$$

que es la expresión análoga a la suma de cuadrados de diferencias de ordenadas. Si el intervalo es (a, b) en vez de $(0, 1)$ se reduce a éste, por el cambio:

$$x = (b - a)\, x' - a.$$

Este método puede dar lugar a cálculos sencillos si partimos de una sucesión de polinomios $P_m(x)$ que llamamos *ortogonales*, por tener la siguiente propiedad:

$$\int_0^1 P_m(x)\, P_n(x)\, dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ \dfrac{1}{2m + 1} & \text{si } m = n \end{cases} \qquad [2]$$

Tratamos de determinar la combinación lineal:

$$c_0 P_0(x) + c_1 P_1(x) + \ldots + c_m P_m(x)$$

tal que:

$$I = \int_0^1 [f(x) - c_0 P_0(x) - c_1 P_1(x) + \ldots + c_m P_m(x)]^2 dx$$

sea mínimo.

Derivando respecto a c_k tenemos:

$$\frac{\partial I}{\partial c_k} = \int_0^1 - 2P_k[f - c_0 P_0 - c_1 P_1 - \ldots - c_k P_k]\, dx =$$

$$= \int_0^1 [- 2P_k f - 2c_k P_k^2]\, dx$$

Igualando a cero estas derivadas se tienen las condiciones de mínimo que nos dan los coeficientes:

$$c_k = (2k + 1) \int_0^1 P_k(x) f(x)\, dx$$

EJEMPLO:

Si la función es $f(x) = \frac{1}{1+x}$ en (0,1), tendremos:

$$c_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = \log 2$$

$$c_1 = 3\int_0^1 \frac{1}{1+x}(1 - 2x)\,dx = 9\log 2 - x$$

$$c_2 = 5\int_0^1 \frac{1}{1+x}(1 - 6x + 6x^2)\,dx = 65\log 2 - 45, \text{ etc.}$$

Si la función $f(x)$ no es conocida más que por una tabla, se pueden calcular por métodos aproximados los coeficientes, o mejor, introducir una sucesión de polinomios que verifican condiciones análogas a las [2] con sumatorias extendidas a los puntos 0, 1, 2, ..., n (*).

Ajustar por el método de momentos una recta al conjunto de datos:

x	y
0	66,7
1	72,7
2	82,3
3	92,1
4	93,0
5	100,6

Sea la recta de ecuación $y = mx + k$.

Designando los puntos dados por (x_i, y_i), tenemos igualando los momentos de órdenes cero y uno del conjunto de puntos dados y de los puntos de la recta:

$$\Sigma\, y_i = \Sigma\,(mx_i + k)$$

$$\Sigma\, x_i y_i = \Sigma\, x_i(mx_i + k)$$

o sea:

$$\Sigma\, y_i = m\,\Sigma\, x_i + kN$$

$$\Sigma\, x_i y_i = m\,\Sigma\, x_i^2 + k\,\Sigma\, x_i$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones se obtienen m y k.

(*) Véase *Milne, Numerical Calculus.*

Los cálculos se disponen ordenadamente en la siguiente forma:

x	y	$x \cdot y$	x^2
0	66,7	0	0
1	72,7	72,7	1
2	82,3	164,6	4
3	92,1	276,3	9
4	93,0	372,0	16
5	100,6	503,0	25
15	507,4	1.388,6	55

$$m = \frac{507{,}4 \cdot 15 - 6 \cdot 1.388{,}6}{225 - 6 \cdot 55} = 6{,}86; \qquad k = 67{,}4$$

luego la recta pedida es: $y = 6{,}86x + 67{,}4$.

Se quiere ajustar el conjunto de puntos siguiente:

x	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
y	1,1	1,3	1,6	2,0	2,7	3,4	4,1

por medio de una parábola

Se comienza por representar gráficamente este conjunto y se observa aproximadamente qué tipo de parábola debe elegirse. En este caso, la gráfica recomienda una parábola de segundo grado:

$$Y = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$$

y para determinar sus parámetros se hace el cambio de variable $u = 2x - 5$, que da para las abscisas los valores:

$$-3, \quad -2, \quad -1, \quad 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3$$

Las operaciones se disponen en un cuadro como el que sigue:

x	u	y	u^2	u^4	uy	$u^2 y$
1,0	− 3	1,1	9	81	− 3,3	9,9
1,5	− 2	1,3	4	16	− 2,6	5,2
2,0	− 1	1,6	1	1	− 1,6	1,6
2,5	0	2,0	0	0	0,0	0,0
3,0	1	2,7	1	1	2,7	2,7
3,5	2	3,4	4	16	6,8	13,6
4,0	3	4,1	9	81	12,6	36,9
		16,2	28	196	14,6	69,9

Las ecuaciones normales son:

$$16{,}2 - 7b_0 - 28b_2 = 0$$

$$14{,}6 - 26b_1 = 0$$

$$69{,}9 - 28b_0 - 196b_2 = 0$$

cuya solución es:

$$y = 2{,}07 - 0{,}521u + 0{,}061u^2$$

que al pasar a la antigua variable se convierte en:

$$y = 6{,}20 - 2{,}26x + 0{,}24x^2$$

4. GRADUACION O SUAVIZACION

Frecuentemente se obtienen al representar datos de observaciones, gráficos en que hay irregularidades respecto de la marcha general o tendencia.

A veces es conveniente, antes de hacer el ajuste por alguno de los métodos indicados, proceder a una *suavización* o *graduación* de los datos, que consiste en sustituirlos por otros que varíen de un modo más regular. Esto puede realizarse en la representación gráfica ajustando a asentimiento una curva a los datos dados y calculando las nuevas ordenadas.

Suponiendo que los intervalos Δx sean iguales, hay una fórmula numérica que se deduce ajustándose por mínimos cuadrados una parábola a cada cinco puntos consecutivos de ordenadas y_{-2}, y_{-1}, y_0, y_1, y_2, y sustituyendo la ordenada y_0 por la que resulta en la parábola. Haciendo cálculos, que dejamos como ejercicio al alumno, se obtiene:

$$u = \frac{1}{15}\left[17y_0 + 12(y_1 + y_{-1}) - 3(y_2 + y_{-2})\right]$$

u es el valor suavizado de y_0. Se van tomando cada cinco puntos consecutivos y se obtienen los nuevos valores suavizados correspondientes a todos los puntos dados, menos a los dos últimos y a los dos primeros, a los cuales no es aplicable el procedimiento. Hay otras muchas fórmulas de este tipo.

5. OTROS AJUSTES

A veces la parábola ajustada no representa en forma satisfactoria la ley del fenómeno observado. Entonces cabe sustituirla por parábolas de orden más elevado o por otras curvas. La elección se hace teniendo presente por una parte la representación cartesiana de las observaciones realizadas, y por otra, los conocimientos que *a priori* se tengan del fenómeno a estudiar. También, en muchos casos, es muy conveniente la representación gráfica en papel logarítmico o semi-

logarítmico y examinar si es apropiado ajustar a estos puntos una recta o curva conocida.

Si tomamos escala logarítmica para las y y natural para las x, ajustar a estos datos la recta:

$$\log y = \log c + x \log a$$

equivale a ajustar la exponencial $y = ca^x$ a los datos observados. Si $P(x)$ es un polinomio determinado, también se puede intentar ajustar la parábola:

$$\log y = \log c + P(x) \log a$$

que equivale a:

$$y = ca^{P(x)}$$

Si se toman escalas logarítmicas en los dos ejes coordenados, el ajuste de la recta:

$$\log y = \log c + K \log x$$

equivale al de la curva:

$$y = cx^K$$

EJERCICIOS

1. Determinar por el método de mínimos cuadrados la parábola que se ajusta mejor al conjunto de puntos $(-4, 2)$; $(0, 8)$; $(4, 9)$; $(8, 11)$; $(12, 8)$; $(16, 5)$.

Solución:

$$y = 7{,}2 + 0{,}94x - 0{,}07x^2$$

2. Se consideran los siguientes datos:

x	1	2	3	4	5	6
y	1,6	4,5	13,8	40,2	125	300

Determinar la exponencial:

$$y = ke^{mx}$$

que mejor se ajusta a este conjunto de puntos.

Solución:

$$y = 0{,}56e^{0{,}16x}$$

3. Las longitudes de un resorte sometido a diferentes pesos son las siguientes:

X grms.	5	10	15	20	25	30
Y cms.	7,26	8,14	8,94	9,91	10,87	11,82

Ajustar una recta $Y = a + bX$.

4. La presión y el volumen de una masa gaseosa están ligados por una ecuación del tipo:

$$pv^a = b$$

Con los siguientes datos obtenidos en un cierto experimento determinar los valores de a y b por mínimos cuadrados (tomando previamente logaritmos):

p(kg/cm^2)	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3
v(litro)	1,65	1,03	0,74	0,61	0,53	0,45

12

Derivación e integración numérica y gráfica

1. DERIVACION NUMERICA DE UNA FUNCION TABULADA

Obtenida la expresión aproximada de una función por un polinomio mediante cualquiera de las fórmulas de interpolación o aproximación, se puede proceder a derivar el polinomio para tener una aproximación de la derivada de la función.

Por ejemplo, si partimos de la fórmula de Newton:

$$y = y_1 + \frac{x - x_1}{h} \frac{\Delta y_1}{1!} + \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{h^2} \frac{\Delta^2 y_1}{2!} + \dots$$

Si en esta fórmula tomamos como variable:

$$\beta = \frac{x - x_1}{h}$$

resulta:

$$\frac{(x - x_1)(x - x_2)}{h^2} = \beta(\beta - 1), \dots$$

luego:

$$y = y_1 + \beta \frac{\Delta y_1}{1!} + \beta(\beta - 1) \frac{\Delta^2 y}{2!} + \dots$$

Por tanto:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\beta} \cdot \frac{d\beta}{dx} = \frac{1}{h} \cdot \frac{dy}{d\beta} =$$

$$= \frac{1}{h} \left[\Delta y_1 + (2\beta - 1) \frac{\Delta^2 y_1}{2!} + (3\beta^2 - 6\beta + 2) \frac{\Delta^3 y_1}{3!} + \dots\right]$$

EJEMPLO:

Para la función del ejemplo del p. 8, lec. 9, tenemos:

$$y' = \frac{-100}{1! \cdot 2} + \frac{1}{3! \cdot 2^2}(2x + 6) + \frac{128}{3! \cdot 2^3}(3x^2 + 12x + 8) + \ldots$$

luego para $x = 0.5$:

$$y' = -\frac{100}{1! \cdot 2} + \frac{1}{2! \cdot 2^2}(2 \cdot 0{,}5 + 6) + \frac{128}{3! \cdot 2^3}(3 \cdot 0{,}5^2 + 12 \cdot 0{,}5 + 8) + \ldots$$

Conviene observar que el que las gráficas de dos funciones pasen por los mismos n puntos del plano, que es la condición que cumplen las fórmulas de interpolación no dice nada sobre las derivadas de dichas funciones, por lo que han de utilizarse con precaución dichas fórmulas de derivación. Además, si para cubrirnos de esta dificultad utilizamos la expresión del resto, es decir, escribimos:

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)$$

y derivamos, resulta formalmente:

$$f'(x) = P'_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}\frac{d}{dx}\left[(x - x_0)\ldots(x - x_n)\right] +$$

$$+ \frac{d}{dx}\left[\frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}\right]\left[(x - x_0)\ldots(x - x_n)\right]$$

Vemos, pues, la dificultad de obtener la derivada, ya que s no es conocida en función de x. Sólo en los puntos $x = x_i$ la fórmula queda reducida a los dos primeros sumandos, pero aún así el resto es complicado.

2. INTEGRACION NUMERICA

Obtenida la expresión aproximada de una función mediante una fórmula de interpolación se puede proceder a integrar ésta en un intervalo, con lo que se obtiene un valor aproximado de la integral de la función. Así se obtiene una serie de fórmulas interesantes. Sin embargo, suele ser más conveniente dividir el intervalo total en intervalos parciales y aplicar dicho método a estos, teniendo en cuenta la propiedad aditiva de la integral. Vamos a aplicar esta idea a la obtención de algunas fórmulas importantes.

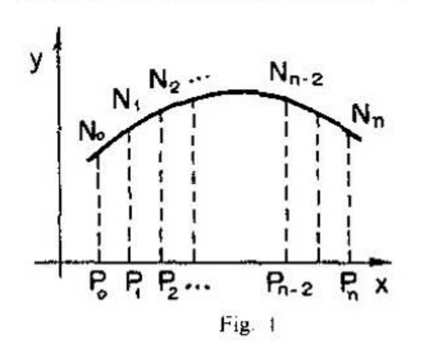


Fig. 1

a) **Método de los trapecios.**

El cálculo de la integral $I = \int_a^b f(x)\,dx$, o sea, del área del recinto:

P_0, P_n, N_n, N_0, se puede hacer, aproximadamente, dividiendo el intervalo en n partes iguales, trazando las cuerdas $N_0\ N_1$, $N_1\ N_2$, ..., y sumando las áreas de los trapecios obtenidos.

Así, resulta:

$$I = \frac{1}{2}\overline{P_0P_1}(y_0 + y_1) + \overline{P_1P_2}(y_1 + y_2) + \dots +$$

$$+ \frac{1}{2}\overline{P_{n-1}P_n}(y_{n-1} + y_n) = \frac{1}{2}h(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \dots + y_n) =$$

$$= h\left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \dots + \frac{1}{2}y_n\right)$$

Como se ve, esta fórmula permite el cálculo *numérico* de la integral, tanto si se tiene una gráfica de la función como si se dispone de una tabla de valores de la función.

El error cometido al utilizar este método de cálculo aproximado, se obtiene por aplicación de la importante fórmula de Euler-Maclaurin (*).

EJEMPLO:

Sea calcular:

$$I = \int_0^1 e^{-x^2}\,dx$$

x	e^{-x^2}		Trapecios
0,0	1,00000		0,5
0,2	0,96079		0,96079
0,4	0,85214		0,85214
0,6	0,69768	2 por	0,69768
0,8	0,52729		0,52729
1,0	0,36788		0,18394
			3,72192

(*) Véase, por ejemplo, Vallée - Poussin o Losada Puga.

b) Fórmula de Simpson

Da, en general, un error inferior al método de los trapecios.

Dividamos el intervalo de integración P_0P_{2n} en $2n$ subintervalos de amplitud:

$$h = \frac{b - a}{2n}$$

Trazamos ordenadas por los puntos de subdivisión, y la idea del método es sustituir cada arco de curva que pasa por tres puntos consecutivos:

$$Q_0, Q_1, Q_2, \qquad Q_2, Q_3, Q_4, \text{etc.}$$

por un arco de parábola que pase por los mismos. Utilicemos el método de coeficientes indeterminados.

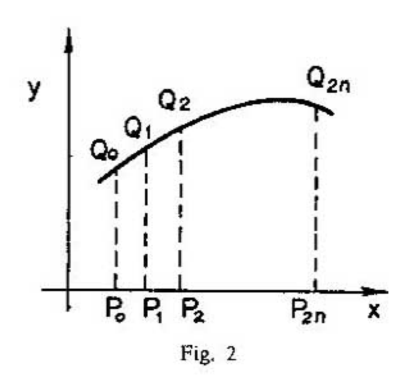


Fig. 2

Si la ecuación del primer arco de parábola es:

$$y = ax^2 + \beta x + y$$

tomando como eje x el de la figura, y como eje y la recta P_1Q_1, resulta que como la parábola pasa por los puntos $Q_0(-h, y_0)$, $Q_1(0, y_1)$, $Q_2(h, y_2)$ se tendrán las condiciones:

$$y_0 = ah^2 - \beta h + \gamma$$

$$y_1 = \gamma$$

$$y_2 = ah^2 + \beta h + \gamma$$

Sumando la primera y tercera ecuaciones, se obtiene:

$$2ah^2 + 2\gamma = y_0 + y_2$$

El área limitada por el arco de parábola, será:

$$I_{0,2} = \int_{-h}^{h} (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)\, dx = \left[\frac{1}{3} \alpha x^3 + \frac{1}{2} \beta x^2 + \gamma x \right]_{-h}^{+h} =$$

$$= \frac{1}{3} h(2\alpha h^2 + 6\gamma) = \frac{1}{3} h(2\alpha h^2 + 2\gamma + 4\gamma) = \frac{1}{3} h(y_0 + y_2 + 4y_1)$$

Análogamente será:

$$I_{2,4} = \frac{1}{3} h(y_2 + 4y_3 + y_4)$$

Luego, sumando, tenemos la *fórmula de Simpson.*

$$I \simeq \frac{1}{3} h(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \dots + y_{2n})$$

Llamando E a la suma de las ordenadas extremas, P a las de índice par e I a las impares, resulta:

$$I \simeq \frac{1}{3} h(E + 4I + 2P)$$

EJEMPLO:

$$I = \int_0^3 (1 + x^2)^{3/2}\, dx$$

Si tomamos $h = \frac{1}{2}$ tenemos la siguiente tabla:

x	$f(x)$			Simpson
0	1,000	1		1,000
0,5	1,398	2		2,796
1	2,828	4		11,312
1,5	5,859	2	$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$ por	11,718
2	11,180	4		44,720
2,5	19,521	2		39,042
3	31,623	1		31,623
				142,211 : 6 = 23,70

Luego $I = 23{,}70$.

Otra fórmula, se obtiene aproximando por una parábola cúbica cada cuatro puntos consecutivos. Por ejemplo, utilizando la fórmula de Newton, tenemos:

$$f(x) = f(0) + x\Delta f(0) + \frac{x(x-1)}{2}\Delta^2 f(0) + \frac{x(x-1)(x-2)}{6}\Delta^3 f(0)$$

e integrando:

$$\int_0^3 f(x)\,dx = 3f(0) + \frac{9}{2}\Delta f(0) + \frac{9}{4}\Delta^2 f(0) + \frac{3}{8}\Delta^3 f(0) =$$

$$= \frac{3}{8}[y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3]$$

que es la llamada regla de los 3/8.

Análogamente tomando 6 puntos y aproximando por la fórmula de Newton con un polinomio de grado 5, se obtiene:

$$f(x) = f(0) + x\Delta f(0) + \ldots + \frac{x(x-1)\ldots(x-5)}{6!}\Delta^6 f(0)$$

luego:

$$\int_0^6 f(x)\,dx = \frac{3}{10}(y_0 + 5y_1 + y_2 + 6y_3 + y_4 + 5y_5 + y_6)$$

que es la fórmula de Weddle.

Las fórmulas anteriores se suelen llamar de Newton Cottes de tipo *cerrado*, por incluir los extremos del intervalo de integración. La fórmula correspondiente a la de Simpson de tipo abierto puede obtenerse a partir de la aproximación de Newton:

$$f(x) = f(1) + x\Delta f(1) + \frac{x(x-1)}{2}\Delta^2 f(1)$$

e integrando:

$$\int_0^4 f(x)\,dx = \frac{4}{3}[2y_1 - y_2 + 2y_3]$$

3. ERROR EN LA FORMULA DE INTEGRACION

En el caso de la fórmula de los trapecios bastará acotar la suma de diferencias:

$$\Delta = \Sigma\left[\int_{xi}^{xi+h} f(x)\,dx - \frac{1}{2}h(f(x_i) + f(x_i + h))\right]$$

Supondremos $f(x)$ con derivadas 1.ª y 2.ª continuas. Supongamos que $P_1(x)$ es la función lineal que aproxima $f(x)$ en el intervalo (x_i, x_{i+h}) y que el resto es $R_1(x)$, es decir:

$$f(x) = P_1(x) + R_1(x)$$

entonces:

$$\int_{x_i}^{x_i+h} f(x)\,dx - \frac{1}{2}h(f(x_i) + f(x_i + h)) = \int_{x_i}^{x_i+h} f(x)\,dx - \int_{x_i}^{x_i+h} P_1(x)\,dx =$$

$$\int_{x_i}^{x_i+h} R_1(x)\,dx = \int_{x_i}^{x_i+h} \frac{1}{2!}\,(x - x_i)(x - x_i - h)f''(x_i')$$

en que:

$$x_i < x_i' < x_i + h = x_{i+1}$$

Se puede aplicar el segundo teorema de la media (*) que nos da:

$$\frac{1}{2}\int_{x_i}^{x_{i+1}}(x - x_i)(x - x_{i+1})f''(x_i')\,dx = \frac{1}{2}f''(x_i'')\int_{x_i}^{x_{i+1}}(x - x_i)(x - x_{i+1})\,dx =$$

$$= \frac{1}{12}(x_i - x_{i+1})^3 f''(x_i'') = -\frac{h^3}{12}f''(x_i'')$$

para algún x_i'' tal que $x_i < x_i'' < x_{i+1}$.

Por tanto:

$$\Delta = -\frac{h^3}{12}\left[f''(x_0'') + f''(x_1'') + \dots + f''(x_{n-1}'')\right]$$

Como $f''(x)$ la suponemos continua en (a, b), existe un punto en el intervalo en que $f''(x)$ es igual a la media aritmética de los valores anteriores, luego:

$$\Delta = -\frac{h^3}{12}nf''(x''') = -\frac{h^2}{12}nhf''(x''') = -(x_n - x_0)f''(x''')\frac{h^2}{12}$$

Por un camino algo más complicado, se obtiene para la fórmula de Simpson:

$$\Delta = -(x_n - x_0)f^{IV}(x')\frac{h^4}{180}$$

es de cir, el error es del orden de h^4, mientras en la de los trapecios era del orden de h^2.

(*) Dice: Si $f(x)$ es continua en $a \leqslant x \leqslant b$ y $g(x)$ no cambia de signo en $a < z < b$, es:

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(x')\int_a^b g(x)\,dx$$

para un x' al menos, tal que $a < x' < b$.

4. IDEA DEL METODO DE MONTECARLO

Se dice que se emplea un método de Montecarlo para resolver un problema (matemático, físico, industrial, etc.), cuando se ha construido un modelo probabilístico y para la solución de éste se utiliza el muestreo artificial o experimental.

EJEMPLO:

Sea calcular $\int_0^1 x^2\,dx = S$ cuya interpretación geométrica es el área comprendida entre la parábola, el segmento (0,1) y la ordenada $1M$.

El modelo probabilístico se obtiene considerando que:

$$Pr[(x, y) \in A] = S = Pr[y \leq x^2]$$

es decir, que tomando un punto al azar en el cuadrado $ORM1$, la probabilidad de que caiga en A es S.

Se sabe que la frecuencia n/N de dicho suceso al realizar N experiencias se puede considerar como una estimación de la probabilidad de que el punto tomado al azar $ORM1$ caiga en el área A cuyo valor coincide con la:

$$\int_0^1 x^2\,dx$$

Fig. 3

Para realizar las experiencias supondremos dos bolsas B, C, cada una con 100 bolas. Las de la bolsa C con los números 0,01; 0,02, ..., 1,00 y la B con los cuadrados de aquellos: 0,0001, 0,0004; ...; 1,0.

Sacamos al azar una bola de la urna C y la otra de la B, si el primer número es menor o igual que el 2.º consideramos este suceso como favorable. Devueltas las bolas y repetida la doble experiencia N veces se han encontrado n sucesos favorables. Tomamos $n/N = S$.

Una idea de la precisión obtenida con este método se tiene observando que como lo que se trata es de estimar una probabilidad S mediante una frecuencia n/N, la ley de los grandes números afirma que (*):

$$Pr\left(\left|\frac{n}{N} - S\right| < \varepsilon\right) > 1 - \frac{1}{4N\varepsilon^2}$$

Mejor es utilizar la aproximación normal a la binomial, que nos da:

$$Pr\left(\left|\frac{n}{N} - S\right| < 2\sqrt{\frac{S(1 - S)}{N}}\right) \simeq 0,95$$

Este método que aquí exponemos muy rápidamente en un ejemplo trivial, es un potente medio de aplicación cuando otros métodos de cálculo numérico

(*) Ver S. RIOS, *Análisis estadístico aplicado*, Madrid, 1972.

son impracticables. Se aplica al cálculo de integrales múltiples, integración de ecuaciones en derivadas parciales, resolución de sistemas lineales, inversión de matrices, etc. Su creador fue Von Neumann.

5. CONSTRUCCION GEOMETRICA DE LA CURVA DERIVADA

Es frecuentemente útil saber deducir de la representación gráfica de la curva C de ecuación $y = f(x)$ una representación gráfica aproximada de la curva derivada C' de ecuación $y = f'(x)$.

Se trazan tangentes en una sucesión de puntos (M) de C y por el punto $\pi(-1, 0)$ se trazan paralelas a dichas tangentes. Estas paralelas determinan sobre el eje Oy segmentos cuyas longitudes son precisamente los valores de $y = f'(x)$ en los puntos correspondientes.

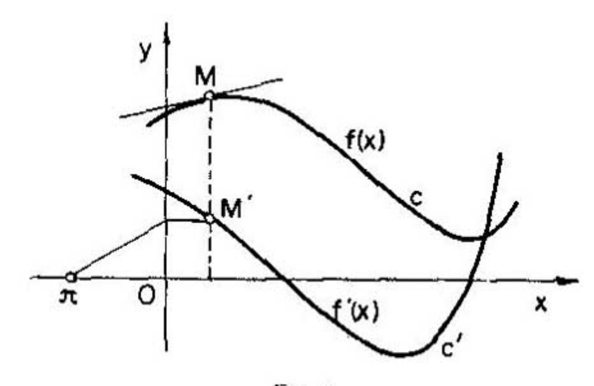


Fig. 4

Para tener la curva C' basta, pues, trazar por dichos puntos del eje y paralelas a Ox y hallar los puntos de intersección (M') de éstas con las correspondientes ordenadas de la curva C.

Como se ve este método requiere trazar tangentes a una curva dibujada. Un modo de hacerlo es fijar una regla que pase por M y moverla, de modo que otro punto de intersección venga a confundirse sensiblemente con M.

Otro método consiste en hacer pasar un espejo normal al plano del dibujo por E y moverlo hasta que la imagen reflejada de la curva coincida sensiblemente con la parte vista directamente. En este momento la dirección de la intersección del espejo con el plano de la curva coincide con la normal a la curva en M y para tener la tangente basta trazar la perpendicular a la normal en M (*).

(*) Su descripción y manejo será objeto de las clases prácticas.

6. INTEGRACION GRAFICA

Suponemos que se trata de determinar el área equivalente a la integral:

$$S = \int_a^b f(x)\,dx$$

en que $f(x)$ es una función cuya gráfica tenemos dibujada por un aparato registrador.

Un primer método puede ser superponer un papel cuadriculado transparente y tomar como medida aproximada del área, por defecto el número de cuadraditos interiores a la misma y como medida aproximada por exceso el número de cuadraditos que tienen puntos comunes con el área. Se puede tomar, por ejemplo, cuadraditos de 1 mm^2.

Otro método consiste en construir la *curva integral*, es decir, dada la integral:

$$S = \int_a^b f(x)\,dx$$

construimos la curva:

$$y = \int_a^x f(x)\,dx$$

y ella nos da para $x = b$ el valor de S.

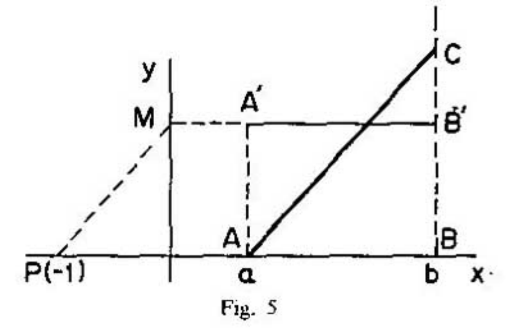


Fig. 5

Supongamos $f(x) = k$. Entonces:

$$y = \int_a^x k dx = k(x - a)$$

es decir, la línea integral es en tal caso una recta que pasa por los puntos $(a, 0)$, $[b, k(b - a)]$. Se construye prolongando $A'B'$ hasta su intersección M con Oy. Trazando por A la $AC \parallel PM$ obtenemos $BC = k(b - a)$.

El procedimiento general cuando se da la representación gráfica de una curva $y = f(x)$ es sustituir esta por segmentos rectilíneos paralelos al eje x, haciendo la descomposición del intervalo (a, b) en intervalos parciales de igual amplitud (a, x_1), (x_1, x_2), ..., y cada uno de éstos en dos partes, de modo que se compensen los triángulos 1 y 1', 2 y 2', etc.

Se toma entonces como línea integral de la $AMNB$, el polígono $A'RQN'TV$. Como los puntos $A'M'N'B'$ pertenecen a la curva, y las rectas RQ, QT son tangentes a la misma en M', N', podemos decir que obtenemos una poligonal circunscrita a la curva integral. El valor de la integral definida es la ordenada final bB'.

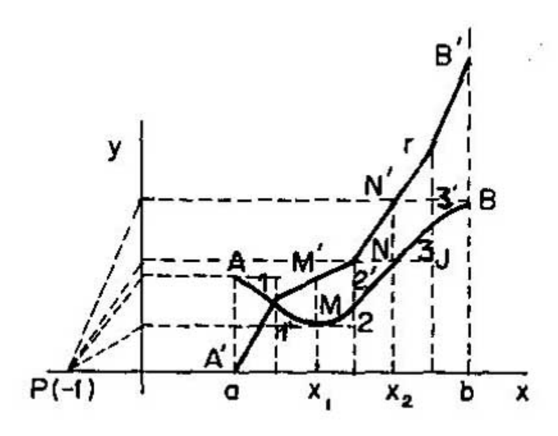


Fig. 6

13

Cálculo de diferencias y otros operadores. Aplicaciones

1. DEFINICIONES

Dada una sucesión de valores de una función $y_0, y_1, \ldots, y_n$ correspondientes a valores de x en progresión aritmética, hemos definido las diferencias adelante por el operador:

$$\nabla y_n = y_{n+1} - y_n$$

También se definen las *diferencias retrógradas:*

$$\Delta y_n = y_n - y_{n-1}; \qquad \Delta^2 y_n = \Delta y_n - \Delta y_{n-1}; \qquad \ldots$$

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
$x_0 - 4\Delta x_0$	y_{-4}			
		Δy_{-3}		
$x_0 - 3\Delta x_0$	y_{-3}		$\Delta^2 y_{-2}$	
		Δy_{-2}		$\Delta^3 y_{-1}$
$x_0 - 2\Delta x_0$	y_{-2}		$\Delta^3 y_{-1}$	
		Δy_{-1}		$\Delta^3 y_0$
$x_0 - \Delta x_0$	y_{-1}		$\Delta^2 y_0$	
		Δy_0		
x_0	y_0			

Las llamadas *diferencias centrales* son:

$$\delta y_n = y_{n+\frac{1}{2}} - y_{n-\frac{1}{2}}$$

y la correspondiente tabla:

x	y	δy	$\delta^2 y$	$\delta^3 y$	$\delta^4 y$
$x_0 - 2\Delta x_0$	y_{-2}				
		$\delta y_{-3/2}$			
$x_0 - \Delta x_0$	y_{-1}		$\delta^2 y_{-1}$		
		$\delta y_{-1/2}$		$\delta^3 y_{-1/2}$	
x_0	y_0		$\delta^2 y_0$		$\delta^4 y_0$
		$\delta y_{1/2}$		$\delta^3 y_{1/2}$	
$x_0 + \Delta x_0$	y_1		$\delta^2 y_1$		
		$\delta y_{3/2}$			
$x_0 + 2\Delta x_0$	y_2				

Otro operador de interés es:

$$E y_n = y_{n+1} \qquad [1]$$

o bien:

$$E f(x) = f(x + \Delta x) \qquad [2]$$

Se ve inmediatamente que:

$$E^m y_n = y_{n+m}$$

$$y_{n+1} = y_n + \Delta y_n$$

o bien, formalmente:

$$y_{n+1} = (1 + \Delta) y_n$$

es decir:

$$E \equiv 1 + \Delta$$

Análogamente tenemos:

$$\nabla y_n = y_n - E^{-1} y_n$$

o bien:

$$\nabla \equiv (E - 1)/E$$

También:

$$\delta u_n = E^{1/2} y_n - E^{-1/2} y_n$$

luego:

$$\delta \equiv E^{1/2} - E^{-1/2}$$

Otro operador interesante es el de *promedio:*

$$\mu y_n = \frac{1}{2}(y_{n+1/2} + y_{n-1/2})$$

luego:

$$\mu \equiv \frac{1}{2}(E^{1/2} + E^{-1/2})$$

Sabemos por la fórmula de Taylor que:

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta x f'(x) + \frac{(\Delta x)^2}{2!} f''(x) + \ldots$$

e introduciendo el operador derivada, se tiene:

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta x\, Df(x) + \frac{(\Delta x)^2}{2!} D^2 f(x) + \ldots$$

$$= \left(1 + \Delta x\, D + \frac{(\Delta x\, D)^2}{2!} + \ldots\right) f(x)$$

$$= [e^{\Delta x D}] f(x)$$

Como por otra parte tenemos:

$$Ef(x) = f(x + \Delta x)$$

resulta la igualdad de símbolos:

$$E \equiv e^{\Delta x D}$$

A veces se usa:

$$U \equiv \Delta x\, D$$

2. FORMULAS DE INTERPOLACION

Estas notaciones permiten obtener un gran número de fórmulas de interpolación.

Tenemos:

$$y_n = E^n y_0 = (1 + \Delta)^n y_0 =$$

$$= y_0 + \binom{n}{1} \Delta y_0 + \binom{n}{2} \Delta^2 y_2 + \ldots + \Delta^n y_0$$

Si suponemos que una función $y = f(x)$ es representable por un polinomio de grado n, una representación de la misma será:

$$y_x = y_0 + \binom{x}{1} \Delta y_0 + \binom{x}{2} \Delta^2 y_2 + \dots + \binom{x}{n} \Delta^n y_0$$

ya que esta expresión nos da para $x = 0, 1, \dots, n$ los valores $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$. Esta es la misma fórmula de Newton que ya obtuvimos.

Por análogas consideraciones se obtienen las fórmulas de Gauss:

$$y_x = y_0 + x\Delta y_0 + \binom{x}{2} \Delta^2 y_{-1} + \binom{x+1}{3} \Delta^3 y_{-1} + \dots$$

$$y_x = y_0 + x\Delta y_{-1} + \binom{x+1}{2} \Delta^2 y_{-1} + \binom{x+1}{3} \Delta^3 y_{-2} + \dots$$

la de Stirling:

$$y = y_0 + \frac{1}{2} x(\Delta y_0 + \Delta y_1) + \frac{x^2}{2!} \Delta^2 y_{-1} + \frac{x(x^2-1)^2}{2 \cdot 3!} (\Delta^3 y_{-1} + \Delta y_{-2}) + \dots$$

y otras de Bessel, Everett, etc.

3. DERIVACION NUMERICA

Otra aplicación del cálculo con diferencias es la derivación numérica.

Introducimos el operador:

$$\int \equiv \frac{1}{D} \equiv D^{-1}$$

De la relación:

$$E = e^{\Delta x D}$$

resulta:

$$\Delta x\, D \equiv \log E \equiv \log(1 + \Delta)$$

es decir:

$$\Delta x\, D = \Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} \dots$$

o sea:

$$D = \frac{\Delta}{\Delta x} \left[1 - \frac{\Delta}{2} + \frac{\Delta^2}{2} - \dots \right]$$

que, para una función $f(x)$ da:

$$\left[\frac{df(x)}{dx}\right]_{x=x_0} = \frac{1}{\Delta x}\left[\Delta f(x_0) - \frac{1}{2}\Delta^2 f(x_0) + \frac{1}{3}\Delta^3 f(x_0) \dots\right]$$

Y análogamente se pueden obtener D^2, D^3, ..., D^n.

4. SUMACION DE SERIES

Otra aplicación del cálculo con diferencias es la sumación de series. Supongamos que la suma de los n primeros términos de la serie sea:

$$S_n(x) = \sum_{r=0}^{n} t(r, x)$$

Podemos escribir:

$$S_n(x) = \left(\sum_{r=0}^{n} E^r\right) t(0, x)$$

y también:

$$S_n(x) = \frac{E^{n+1} - 1}{E - 1}\, t(0, x)$$

Supongamos que $t(r, x)$ se puede considerar como diferencia de otra función $\xi(r, x)$, es decir, que es:

$$t(r, x) = \Delta\xi(r, x)$$

Tendremos:

$$S_n(x) = \frac{E^{n+1} - 1}{E - 1}\,\Delta\xi(0, x)$$

$$= (E^{n+1} - 1)\,\xi(0, x) =$$

$$= \xi(n + 1, x) - \xi(0, x)$$

que nos da la suma de los n primeros términos de la serie.

Por ejemplo: la facultad:

$$x^{(m} = m!\binom{x}{m} = x(x - 1) \dots (x - m + 1)$$

es tal que:

$$x^{(m} = \Delta\frac{x^{(m+1}}{m + 1}$$

y como un polinomio se puede expresar como suma de facultades, resulta que toda serie cuyo término general es un polinomio se puede sumar.

Por ejemplo,

$$\sum_{r=0}^{n} r^3 = \sum_{r=0}^{n} [r(r-1)(r-2) + 3r(r-1) + r] = \sum_{r=0}^{n} [r^{(3} + 3r^{(2} + r^{(1}] =$$

$$= \frac{(n+1)^{(4}}{4} + (n+1)^{(3} + \frac{(n+1)^{(2}}{2} = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

Análogamente una serie del tipo $\Sigma\, ka^r$ se puede sumar, pues por ser:

$$\Delta a^r = a^{r+\Delta r} - a^r = (a^{\Delta r} - 1)\, a^r$$

resulta:

$$a^r = \Delta\left(\frac{a^r}{a^{\Delta r} - 1}\right)$$

Otro ejemplo de aplicación es la *transformación de Euler:*

Sea la serie alternada, cuya suma parcial es:

$$S_n = u_0 - u_1 + u_2 - \ldots \pm (-1)^{n-1} u_{n-1}$$

Se tiene:

$$S_n = \frac{1 + E^n}{1 + E} u_0$$

y si suponemos que $u_n \to 0$, será:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1+E} u_0$$

y como $E = 1 + \Delta$, será:

$$S = \frac{1}{2} \frac{u_0}{1 + \dfrac{\Delta}{2}} = \frac{1}{2}\left[u_0 - \frac{1}{2}\Delta u_0 + \frac{1}{4}\Delta^2 u_0 - \ldots\right]$$

Este método puede servir para acelerar la convergencia. Así en la serie de Bromwich:

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \ldots$$

se puede obtener la suma con $\varepsilon < 0{,}0001$ tomando 6 términos y las diferencias con los 7 siguientes, mientras para obtener la misma aproximación con la suma directa hacen falta 10^8 términos.

5. INTEGRACION NUMERICA. FORMULA DE EULER-MAC-LAURIN

Una fórmula de integración numérica muy citada es la de Euler-Mac Laurin.

Si consideramos la suma:

$$\sum_{x=a}^{x=a+(n-1)h} f(x) = \left(\sum_{r=0}^{n-1} E^r\right) f(a)$$

como es:

$$\sum_{r=0}^{n-1} E^r = \frac{E^n - 1}{E - 1} \qquad \text{y} \qquad E = e^{hD} = e^U$$

tendremos:

$$\frac{1}{E-1} = \frac{1}{e^U - 1} = \frac{1}{U} \frac{U}{e^U - 1}$$

y mediante la conocida serie de Bernoulli:

$$\frac{U}{e^U - 1} = 1 - \frac{U}{2} + B_1 \frac{U^2}{2!} - B_2 \frac{U^4}{4!} + \ldots$$

en que:

$$B_1 = \frac{1}{6},\ B_2 = \frac{1}{30},\ B_3 = \frac{1}{4^2},\ \ldots$$

(son los llamados números de Bernoulli).

Obtenemos:

$$\frac{1}{E-1} = \frac{1}{U} - \frac{1}{2} + B_1 \frac{U}{2!} - B_2 \frac{U^3}{4!} + \ldots$$

luego:

$$\sum_{x=a}^{x=a+(n-1)h} f(x) = \frac{E^n - 1}{E - 1} f(a) =$$

$$= (E^n - 1) \quad \frac{1}{U} - \frac{1}{2} + B_1 \frac{U}{2!} - B_2 \frac{U^3}{4!} + \ldots \quad f(a) =$$

$$= (E^n - 1) \left(\frac{1}{h} \int f(a)\, da - \frac{1}{2} f(a) + \frac{B_1}{2!} h f'(a) - \frac{B_2}{4!} h^3 f'''(a) + \ldots \right)$$

$$= \frac{1}{h} \int_a^{a+nh} f(x)\, dx - \frac{1}{2} [f(a) + nh) - f(a)] + \frac{B_1}{2!} h [f'(a + nh) - f'(a)] -$$

$$- \frac{B_2}{4!} h^3 [f'''(a + nh) - f'''(a)] + \ldots$$

y reordenando resulta la fórmula de Euler-Mac Laurin.

$$\int_a^{a+nh} f(x)\,dx = \frac{h}{2}[f(a) + 2f(a+h) + 2f(a+2h) + \ldots +$$

$$+ 2f(a+nh)] - \frac{h^2}{12}[f'(a+nh) - f'(a)] +$$

$$\frac{h^4}{720}[f'''(a+nh) - f'''(a)] - \frac{h^6}{30240}[f^{v}(a+nh - f^{v}(a)] + \ldots$$

Esta fórmula se utiliza más para series lentamente convergentes que como método práctico de integración numérica.

Si ponemos $h = 1$, $a = 0$, resulta:

$$\sum_{r=0}^{n} f(r) = \int_0^n f(x)\,dx + \frac{1}{2}[f(0) + f(n)] + \frac{1}{12}[f'(n) - f'(0)] -$$

$$- \frac{1}{720}[f'''(n) - f'''(0)] + \ldots$$

Si suponemos que $f^{k}(n) \to 0$ para todo k, cuando $n \to \infty$, resulta:

$$\sum_{r=0}^{\infty} f(r) = \int_0^{\infty} f(x)\,dx + \frac{1}{2}f(0) - \frac{1}{12}f'(0) + \frac{1}{720}f'''(0) \ldots$$

Cualquier serie cuyos términos son polinomios se pueden sumar por esta fórmula. Así:

$$\sum_{r=0}^{n} r^3 = \int_0^n r^3 dr + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{12}3n^2 = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4} = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

14

Métodos gráficos en los problemas algebraicos

1. OPERACIONES ELEMENTALES. MEDIA ARITMETICA

Suponemos bien conocidos los métodos gráficos de suma, producto y cociente de segmentos como consecuencia de las operaciones geométricas de traslación y homotecia. Como aplicación vamos a obtener la media ponderada:

$$a = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{a_1 + a_2 + a_3}$$

Sobre un eje Ox a partir de un origen O tomamos en sentido negativo $OQ = 1$ y en la perpendicular por O tomamos $OR_1 = b_1$, $OR_2 = b_2$, $OR_3 = b_3$. En el mismo eje Ox tomamos a partir de otro origen P, los segmentos $PP_1 = a_1$, $P_1P_2 = a_2$, $P_2P_3 = a_3$. Trazamos sucesivamente $PS_1 \parallel QR_1$, $S_1S_2 \parallel QR_2$, $S_2S_3 \parallel QR_3$. Se tiene:

$$\frac{P_1S_1}{PP_1} = \frac{OR_1}{QO}$$

o sea:

$$\frac{P_1S_1}{a_1} = \frac{b_1}{1}$$

o bien: $P_1S_1 = a_1b_1$

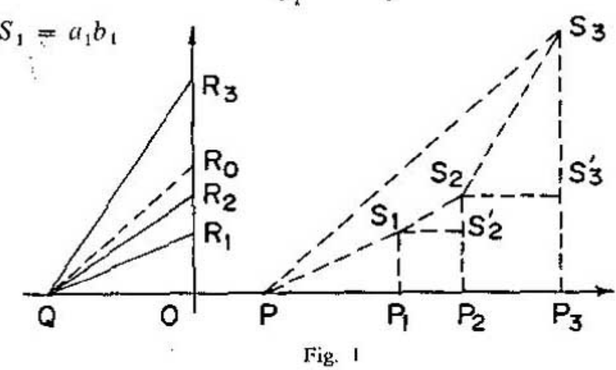


Fig. 1

Resulta así que:

$$P_3S_3 = P_1S_1 + S'_2S_2 + S'_3S_3 = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

Trazamos ahora:

$$PS_3 \quad \text{y} \quad QR_0 \parallel PS_3$$

luego:

$$\frac{P_3S_3}{PP_3} = \frac{OR_0}{QO}$$

o bien:

$$\frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{a_1 + a_2 + a_3} = \frac{OR_0}{1}$$

es decir, tenemos el resultado final:

$$OR_0 = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{a_1 + a_2 + a_3} = a$$

2. RESOLUCION GRAFICA DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Supongamos que se trata de eliminar una incógnita x entre dos ecuaciones de un sistema:

$$a_1x + b_1y + \dots + l_1t = k_1$$

$$a_2x + b_2y + \dots + l_2t = k_2$$

....

....

La ecuación: $(a_1 + \lambda a_2)x + (b_1 + \lambda b_2)y + \dots + (l_1 + \lambda l_2)t = k_1 + \lambda k_2$, combinación lineal de las anteriores, carecerá de la incógnita x cuando $a_1 + \lambda a_2 = 0$.

Para llegar gráficamente a esta eliminación tracemos tantas rectas paralelas como ecuaciones tenga el sistema y tomando en ellas como orígenes $O_1, O_2, \dots, O_n$, puntos alineados, construyamos en cada una el llamado *esquema de la ecuación respectiva.*

El esquema de una ecuación no es más que un conjunto de puntos cuyas abscisas son los coeficientes de la ecuación. Por ejemplo: si las ecuaciones son:

$$2x + y + 3z = 5 \qquad (1.^a)$$

$$x + 2x + 3z = 4 \qquad (2.^a)$$

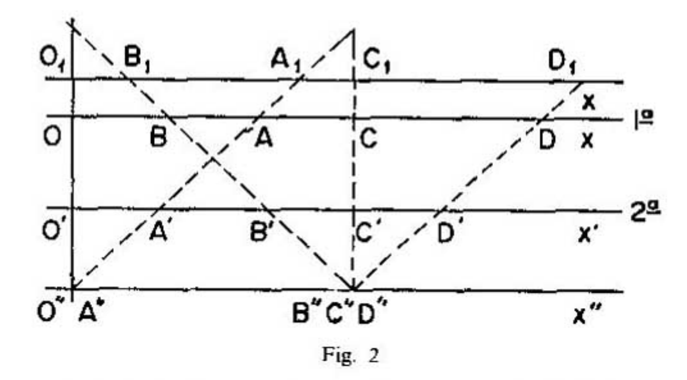


Fig. 2

El esquema de la 1.ª está formado por los puntos A, B, C, D, cuyas abscisas son 2, 1, 3, 5, y, análogamente, el de la 2.ª ecuación, por los puntos A', B', C', D'.

Tracemos las rectas AA', BB', CC', DD'. Cortando éstas por una paralela O_1x_1 a Ox las intersecciones nos dan el esquema $A_1B_1C_1D_1$ de la ecuación:

$$(\lambda \cdot 2 + 1)x + (\lambda + 2)y + (3\lambda + 3)z = 5\lambda + 4$$

(combinación lineal de las anteriores). Si trazamos la paralela por O'', intersección de AA' con OO', el coeficiente de x será nulo, y tendremos sobre $O''x''$ el esquema $A''B''C''D''$ de la ecuación que resulta de eliminar x.

3. CALCULO DEL VALOR NUMERICO DE UN POLINOMIO. RESOLUCION GRAFICA DE ECUACIONES ALGEBRAICAS

Dado un polinomio, como, por ejemplo:

$$y = 4x^3 - 2x^2 - x - 8$$

el cálculo de su valor numérico por procedimiento gráfico, puede hacerse por los pasos sucesivos siguientes:

$$y_1 = 4x,\ \ y_2 = y_1 - 2,\ \ y_3 = y_2 \cdot x,\ \ y_4 = y_3 - 1,\ \ y_5 = x \cdot y_4,\ \ y = y_5 - 8$$

La construcción gráfica correspondiente se suele llamar *ortógono de Lill*.

De un modo sistemático se realiza así: Se dibuja un cuadrado $OPQR$, en el que se fija el sentido de los lados sucesivos por las flechas. Se parte de un punto O_1 y se traza $O_1P_1 \parallel OP$ y se toma el primer coeficiente $4 = O_1P_1$ en el sentido positivo por ser positivo dicho coeficiente. Se traza $P_1Q_1 \perp O_1P_1$ y se toma $P_1Q_1 = -2$ en sentido contrario a PQ por ser el coeficiente negativo. Se traza $Q_1R_1 \perp P_1Q_1$ y se toma $Q_1R_1 = -1$. Se traza R_1O_2 y se toma $R_1O_2 = -8$. Se obtiene así el *ortógono fundamental* de la ecuación: $O_1P_1Q_1R_1O_2$.

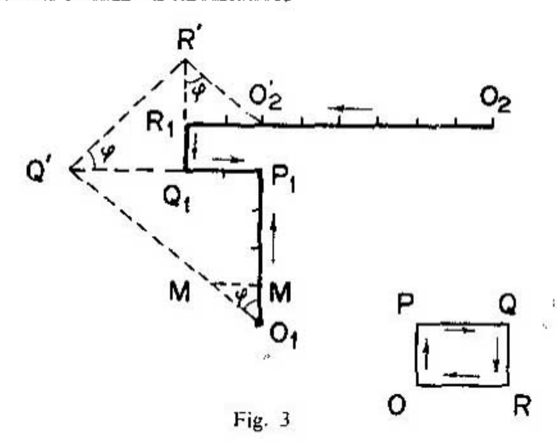


Fig. 3

Se toma $O_1M = 1$, $NM = |x|$ cuidando de que MN quede a la izquierda de O_1P_1 si $x > O$ y a la derecha si $x < O$. De este modo $tg\ NO_1M = tg\ \phi = x$.

Tenemos ahora:

$$P_1Q'_1 = O_1P_1\ tg\ \phi = 4x$$

luego:

$$Q'_1Q_1 = Q'_1P_1 + P_1Q_1 = 4x - 2$$

A partir de Q'_1 trazamos $Q'_1R'_1 \perp O_1Q'_1$, con lo que:

$$P_1Q'_1R'_1 = \phi,\ R'_1R_1 = R'Q_1 - Q_1R_1 = Q'_1Q_1\ tg\ \phi + 2R_1 = (4x - 2)x - 1$$

Siguiendo este proceso en la figura resulta finalmente $O'_2O_2 = 4x^3 - 2x - x - 8$.

Esta construcción puede utilizarse para obtener valores aproximados de las raíces de una ecuación. Basta observar que si x es raíz, el valor del polinomio es igual a cero, es decir, O'_2 coincide con O_2. Basta, pues, ir modificando el ángulo ϕ hasta que se tenga esta coincidencia. Teniendo en cuenta que $O_1Q'_1R'_1O'_2$ es un ortógono se facilitan los tanteos utilizando un papel milimitrado transparente una vez trazado el ortógono fundamental $O_1P_1Q_1R_1O_2$.

Otros métodos de resolución gráfica de ecuaciones mediante la representación cartesiana fueron indicados anteriormente.

4. TRANSFORMACION POR LA ABSCISA

El método anterior tiene el inconveniente de no dar una representación gráfica continua al variar x que tenga un valor intuitivo. Vamos a ver un método adecuado a este fin.

Dada una curva C de ecuación $y = f(x)$ llamaremos *transformada directa por la abscisa* a la curva C_1 de ecuación $y_1 = xf(x)$, y la C se llama *transformada inversa por la abscisa de la* C_1.

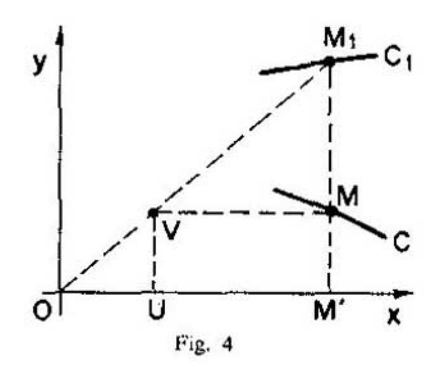


Fig. 4

Supuesta representada C en coordenadas cartesianas, se toma un punto M y se trazan $MM' \parallel Oy$ y $MV \parallel Ox$. Si es $OU = 1$, la intersección de $UV \perp Ox$ con MV nos da el punto V y uniendo O con V su intersección con MM' es el punto M_1 de la curva C_1.

Se tiene:

$$\frac{M'M_1}{OM'} = \frac{UV}{OU}$$

o bien:

$$\frac{M'M_1}{x} = \frac{y}{1}$$

es decir:

$$M'M_1 = x \cdot y = x \cdot f(x)$$

La construcción de M dado M_1 es inmediata también.

Si tomamos como curva C la recta:

$$y = a_0x + a_1$$

la C_1 es:

$$y_1 = x(a_0x + a_1)$$

o bien:

$$y_1 = a_0x^2 + a_1x$$

y es inmediato obtener sumando a_2:

$$y_1^* = a_0x^2 + a_1x + a_2$$

Una nueva aplicación nos da:

$$y_2 = x(a_0x^2 + a_1x + a_2)$$

también:

$$y_2^* = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$$

Como se ve este método permite construir puntos de una parábola de orden n.

Recíprocamente dados N puntos, que se suponen situados aproximadamente en una parábola de orden n, podemos aplicar el procedimiento de la transformada inversa por la abscisa n-1 veces, tomando cada vez como origen uno de los últimos puntos obtenidos, nos dará $N - n + 1$ puntos que estarán aproximadamente en línea recta.

Trazada esta recta, podemos, aplicando la transformación directa por la abscisa obtener puntos de la parábola. Este método puede considerarse como método de *ajuste y de interpolación gráfica.*

15

Ideas de Nomografía

1. ESCALAS

Las escalas constituyen un medio de representar una función distinto de los diagramas. Si se toman sobre una recta los valores $y = f(x)$ y se escriben no los de $f(x)$, sino los de x, se tiene la *escala* de la función.

El ejemplo más usual de esta representación lo constituyen las escalas logarítmicas de la regla de cálculo (*).

En la figura se han representado, además de la escala natural $y = x$, las de $y = x^3$, $y = \sqrt[3]{x}$.

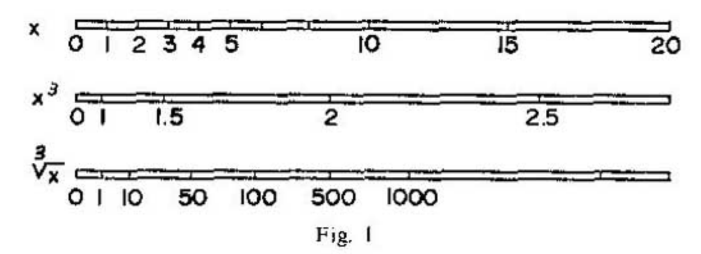


Fig. 1

Esta representación por escalas puede combinarse con los diagramas cartesianos dando lugar a imágenes sencillas de funciones complicadas, como veremos a continuación.

2. PAPEL LOGARITMICO DOBLE

Tomando en los ejes cartesianos las escalas logarítmicas $\xi = \log x$, $\eta = \log y$ la función $y = Cx^m$ (cuyo diagrama en escalas naturales es una curva potencial) tomando logaritmos se convierte en:

$$\log y = \log C + m \log x, \quad \text{o sea: } \eta = \log C + m\xi$$

(*) Su descripción y manejo será objeto de las clases prácticas.

luego en papel logarítmico doble el diagrama de dicha función es una recta de pendiente m y ordenada en el origen $\log C$.

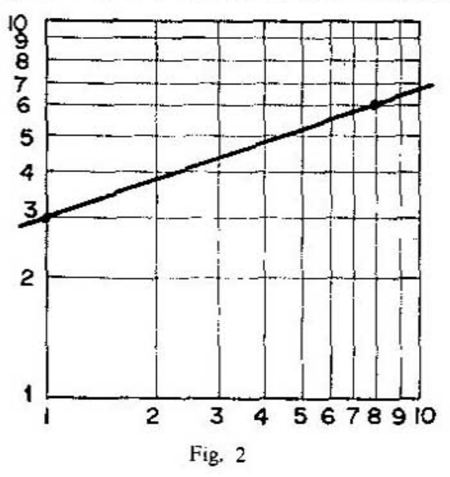


Fig. 2

En la figura se ha representado la función $y = 3x^{1/3}$. Como se trata de papel logarítmico, basta dar a x dos valores; por ejemplo, para $x = 1$, $y = 3$; para $x = 8$, $y = 6$. Como el diagrama sabemos que es una recta, basta unir los puntos que tienen estas coordenadas.

De este tipo es la función de V. Pareto, $y = ax^{-b}$, que da el número y de personas de un país cuya renta es $> x$. Esta función se representa en papel logarítmico doble por una recta de pendiente negativa.

3. PAPEL LOGARITMICO SIMPLE

Es apropiado para funciones exponenciales del tipo:

$$y = ka^x$$

Tomando logaritmos, resulta:

$$\log y = \log k + x \log a$$

Introduciendo una sola escala logarítmica $\eta = \log y$, la función se convierte en:

$$\eta = \log k + x \log a,$$

que representa una recta.

Se usan también papeles con escalas de cuadrados ($x = \xi^2$) con escalas de inversos:

$$x = \frac{1}{\xi}, \text{ etc.}$$

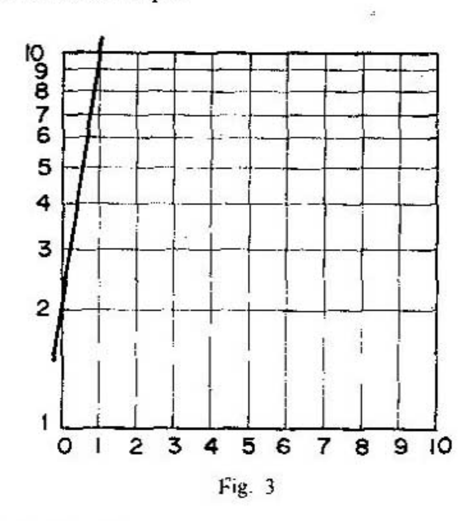


Fig. 3

En la figura está la representación de la función:

$$y = 2 \cdot 4^x$$

Para $x = 0$, $y = 2$; para $x = 1$, $y = 8$

4. ABACOS CARTESIANOS

La idea de representar las funciones de dos variables mediante las líneas de nivel de sus superficies representativas en coordenadas cartesianas, ha conducido a los *ábacos cartesianos*, que han sido el punto de partida de la *Nomografía*, rama de la matemática aplicada que se ocupa de la construcción de representaciones gráficas de funciones que faciliten el cálculo de valores de las mismas para valores particulares de las variables.

Una vez trazado el ábaco, mediante operaciones geométricas muy sencillas, se pueden calcular valores de la función con suficiente aproximación para muchas aplicaciones en la Técnica, Estadística, Economía, etc.

Sea una función $z = f(x, y)$ o, más general:

$$F(x, y, z) = 0$$

Si hacemos $z = k$, obtenemos $F(x, y, k) = 0$, que es la ecuación de la curva de intersección de la superficie que representa la función con el plano $z = k$. Dando valores a z, se obtiene un haz de *curvas de nivel* de la superficie que, representadas sobre el plano XY, constituyen el *ábaco o nomograma cartesiano* de la función.

Por ejemplo, si la función es $z = x \cdot y$, dando a z valores 1, 2, 3, ... tenemos un haz de hipérbolas equiláteras representadas en la figura 1, que constituye el ábaco cartesiano de la función.

Si queremos z para $x = 1, 5$, $y = 0, 8$, señalaremos este punto en el plano XY. Si estuviera sobre una línea del ábaco dibujado, la correspondiente cota sería el valor de z.

Si M está entre dos líneas del ábaco, la paralela por M al eje X intercepta entre las dos hipérbolas consecutivas, entre las que está dicho punto, un segmento NP. Aproximadamente, se calcula que NM es 1/5 de NP, y entonces hay que agregar 1/5 a la cota de N, con lo que obtenemos 1, 2 para cota de M (*).

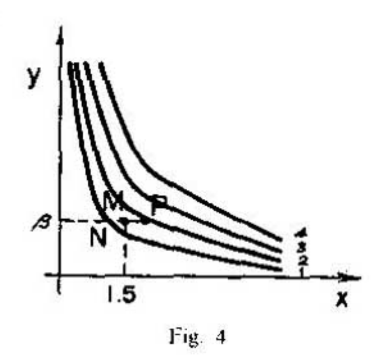
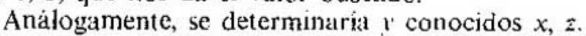


Fig. 4

Si se da $z = 1, 2$, $y = 0, 8$ y queremos calcular x, trazaremos la paralela al eje X que corresponde a la ordenada 0, 8; ésta intercepta entre las curvas 1 y 2 un segmento NP. Sobre éste hay que determinar el punto M en que le cortaría la curva correspondiente a $z = 1, 2$, para lo cual bastará dividir NP en 10 partes iguales y tomar $NM = 2$ de estas partes. Proyectando M sobre OX tenemos su abscisa $x = 1, 5$, que nos da el valor buscado.



Análogamente, se determinaría y conocidos x, z.

(*) Esto equivale a hacer una interpretación lineal.

Para la misma función $z = x \cdot y$ podemos tener otro ábaco representando las curvas de nivel $x =$ constante. Así se obtiene un haz de rectas con el que se opera en la misma forma indicada para obtener valores de x, y, z.

Ejemplo:

Sea la ecuación de 2.° grado:

$$z^2 + pz + q = 0$$

que puede considerarse como una función de tres variables, y se trata de obtener z dados p y q. Dando valores a z tenemos en el plano (p, q) un haz de rectas:

$$k^2 + kp + q = 0$$

que constituirá el ábaco buscado y permitirá dados p y q resolver fácilmente la correspondiente ecuación de 2.° grado.

Un procedimiento análogo es válido para las ecuaciones de tercer grado:

$$z^3 + pz + q = 0$$

Constrúyalos el lector como ejercicio.

5. ANAMORFOSIS

Estos ábacos a veces no son prácticos porque las líneas de nivel se acumulan en ciertas zonas, la lectura se hace difícil y la interpolación de líneas de nivel resulta impracticable.

Este inconveniente se salva con las llamadas *anamorfosis* del nomograma.

Si proyectamos sobre el plano XY la línea de nivel $z = z_0$ y además la $x = x_0$, y la $y = y_0$, las tres pasan por el punto x_0, y_0, ya que en el espacio pasan por el punto (x_0, y_0, z_0). Se observa que las líneas de nivel $x = x_0$, $y = y_0$ que en el espacio serán, en general, curvas, al proyectarlas en el plano XY son rectas paralelas a los ejes coordenados.

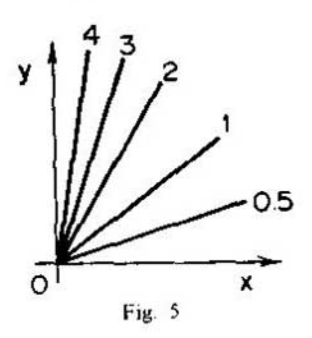


Fig. 5

Fig. 6

Supongamos, pues, trazados estos tres haces de líneas de nivel sobre una lámina flexible y que hacemos una deformación de la misma, de modo que cada tres líneas de nivel que pasan por un punto no dejen de tener este punto común en las sucesivas posiciones, con lo que el nomograma sigue representando la misma función.

Esta transformación, que se denomina *anamorfosis* permite, utilizándola convenientemente, obtener un nomograma más claro y con dimensiones más adecuadas que el primitivo.

Como se ve, la anamorfosis es una transformación cualquiera biunívoca y continua sin que puedan darse reglas generales para elegir en cada caso la adecuada.

EJEMPLO:

Si al representar la función $z = xy$ ponemos:

$$\log z = \log x + \log y$$

y adoptamos para la x e y escalas logarítmicas, es decir, hacemos:

$$\xi = \log x, \qquad \eta = \log y$$

habremos de construir el ábaco de la función:

$$\log z = \xi + \eta$$

que está formado por un haz de rectas paralelas, que constituye una anamorfosis del ábaco primitivo de hipérbolas.

6. NOMOGRAMAS DE RECTAS PARALELAS

Una generalización de la idea anterior conduce a estos nomogramas.

Supongamos que mediante las transformaciones:

$$X = f_1(x)$$
$$Y = f_2(y) \qquad [1]$$

la relación analítica entre z, x e y, tome la forma:

$$f(z) = aX + bY \qquad [2]$$

Entonces las líneas de nivel $z = k$ se reducen a rectas paralelas de ecuación:

$$f(k) = aX + bY$$

y el nomograma es completamente análogo al antes considerado para la función:

$$\log z = \log x + \log y$$

EJERCICIO

Construir los nomogramas de las funciones:

$$z = 2 \operatorname{sen} x + 3 \cos y$$

$$z = x \cdot e^{y+1}$$

7. NOMOGRAMA DE PUNTOS ALINEADOS

Dadas las ecuaciones $x = f(t)$, $y = g(t)$ podemos representar en el plano (x, y) puntos de la curva cuyas ecuaciones paramétricas son aquellas. Basta dar valores a t, por ejemplo, en progresión aritmética: $-2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$, y otros intermedios y representar los puntos correspondientes, con lo que se obtendrá una curva graduada como la de la figura 4. Señalado un punto P sobre la curva comprendido entre dos puntos a los que corresponde valores $t = 1$, $t = 2$, se calcula aproximadamente t, dividiendo el arco en partes, tal que a P le corresponde, por ejemplo, $t = 1, 7$.

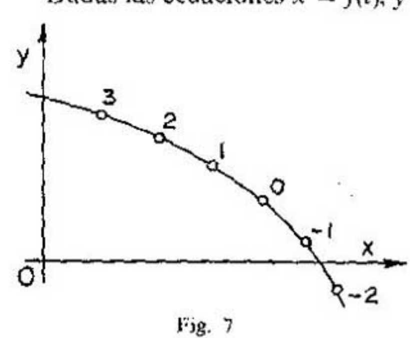


Fig. 7

Recíprocamente, dado $t = 1, 7$ se determina aproximadamente sobre la curva graduada el punto P, al que corresponde este valor del parámetro.

Dicho esto, la idea fundamental de la teoría de nomogramas de puntos alineados es la siguiente:

Si tres puntos $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$ están en línea recta, se verifica la condición:

$$y_1(x_2 - x_3) + y_2(x_3 - x_1) + y_3(x_1 - x_2) = 0 \qquad [1]$$

o bien, en la forma de determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \qquad [2]$$

Sea, por ejemplo, la función de tres variables:

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = 0 \qquad [3]$$

la que queremos representar por medio de un ábaco.

Elijamos seis funciones:

$$\begin{matrix} x_1 = f_1(\alpha) & x_2 = f_2(\beta) & x_3 = f_3(\gamma) \\ y_1 = g_1(\alpha) & y_2 = g_2(\beta) & y_3 = g_3(\gamma) \end{matrix} \qquad [4]$$

tales que se verifique:

$$f(\alpha, \beta, \gamma) \equiv \begin{vmatrix} 1 & f_1(\alpha) & g_1(\alpha) \\ 1 & f_2(\beta) & g_2(\beta) \\ 1 & f_3(\gamma) & g_3(\gamma) \end{vmatrix} = 0$$

o bien:

$$g_1(\alpha)\,[f_2(\beta) - f_3(\gamma)] + g_2(\beta)\,[f_3(\gamma) - f_1(\alpha)] + g_3(\gamma)\,[f_1(\alpha) - f_2(\beta)] = 0 \quad [5]$$

Si tenemos tres valores α, β y γ, a los cuales por [4] corresponden tres puntos P_1, P_2, P_3, el verificarse [5] supone que estos tres puntos están alineados.

Luego si construimos en el mismo papel las tres curvas [4] graduadas y nos dan valores particulares de α y β, podremos encontrar el correspondiente valor de γ, sin más que unir los puntos correspondientes en las dos primeras curvas por una recta que cortará a la tercera curva en un punto o varios, a los cuales corresponderán los valores buscados de la variable γ.

Toda la dificultad está, pues, en hacer la descomposición de la función en la forma indicada, mediante la introducción de seis funciones.

EJEMPLO:

Sea construir el ábaco de la ecuación de tercer grado:

$$t^3 + at + \beta = 0$$

Se comprueba fácilmente que sirven como escalas las curvas:

$$(c_1)\ \begin{matrix} x_1 = -1 \\ y_1 = a \end{matrix} \quad ; \qquad (c_2)\ \begin{matrix} x_1 = +1 \\ y_2 = \beta \end{matrix} \quad ; \qquad (c_3)\ \begin{matrix} x_2 = \dfrac{1-t}{1+t} \\ y_3 = \dfrac{-t^3}{1+t} \end{matrix}$$

Las dos primeras son rectas y basta dibujar de (c_3) la parte correspondiente a $t > 0$; pues las raíces negativas de la ecuación precedente son las raíces positivas de la:

$$(-t)^3 + a(-t) + \beta = 0$$

o bien:

$$t^3 + at - \beta = 0$$

que se resuelve con el mismo *ábaco*.

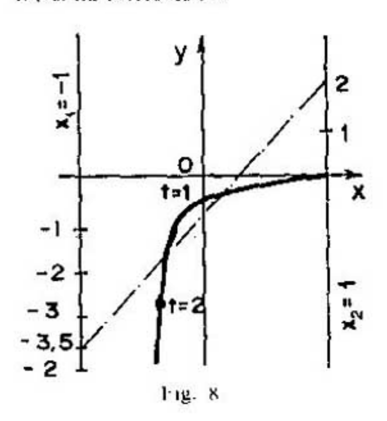


Fig. 8

Si se quiere resolver la ecuación:

$$t^3 - 3{,}5t + 2 = 0$$

se toma $-3{,}5$ sobre la recta $x = -1$ y 2 sobre la recta $x = 1$, con lo que se obtienen dos puntos de intersección de la recta que los une con la curva a los cuales corresponden los valores de t aproximados: 0,69, 1,5 que son dos raíces. La tercera raiz se obtiene resolviendo análogamente la ecuación:

$$t^3 - 3{,}5t - 2 = 0$$

8. NOMOGRAMAS PARA FUNCIONES DE *n* VARIABLES

En general, la teoría de ábacos se puede aplicar al caso de funciones de varias variables:

$$z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

en el caso en que pueda reducirse a una cadena de sucesivas funciones de dos variables, es decir, en el caso de una función de tres variables:

$$z = f_1(x_1, x_2, x_3) \qquad [1]$$

Si se tiene:

$$z = f_1(x_1, z_1) \qquad [2]$$

siendo:

$$z_1 = g(x_2, x_3) \qquad [3]$$

se pueden construir dos nomogramas superpuestos, el primero da z_1 en función de x_2, x_3 y el segundo da z conocidos z_1, x_1.

EJERCICIOS

1. La función:

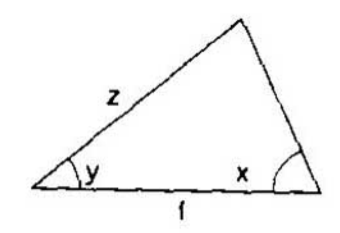
$$z = \frac{\text{sen } x}{\text{sen } (x + y)}$$

que da el lado z de un triángulo cuando el contiguo, que forma con él un ángulo y, vale 1, siendo el ángulo opuesto x, se presenta en medidas con telémetro. Construir el nomograma. grama.

Se observará la acumulación de curvas de nivel en la proximidad de la linea $z = 10$ y la $z = \infty$ y, por tanto, la dificultad de obtener con precisión valores de $z > 10$.
Utilícese a tal fin una anamorfosis de tal nomograma.

2. Construir un nomograma de puntos alineados para la función:

$$z = 3x^n y^m$$



3. Idem. para la función:

$$z = \frac{xy^3}{12}$$

que da el momento de inercia de un rectángulo de base x y altura y, respecto a la paralela a su base por el centro.

4. Construir un nomograma de escalas paralelas para calcular el poder calorífico (p) de un carbón en función de las cantidades (c) de Carbono y (h) de Hidrógeno mediante la fórmula:

$$p = 11140\ c + 37500\ h - 3000$$